序

这本书是根据我 1984 年夏天在暑期教学中心讲授微分几何时的讲义编写而成的．讲义的整理工作，完全是由沈纯理和虞言林两位同志动手．虞言林同志并对某些部份有所增补．第八节的附录就是他写的．我谨在此向他们深致谢意．

这本书的内容是微分几何入门的第一步．故此所涉及的课题，从某一个角度来看，是非常浅显的．对此，一些国内国外的学者和同事表示不解，问我为什么要远涉重洋来讲这么浅的课．自然这就间接提出了为什么我要在中国发表一本这么初步的著作的疑问．我的回答是分开两方面的．第一，我很喜欢讲初步的课和写初步的书；其次，我素来信服唐朝魏征的四句话：

欲流之远者，必浚其泉源．

求木之长者，必固其根本．

在目前偏重所谓"尖端科学"的时刻，这种"浚源、固本"的教育工作，是很有可能被忽略的．这本书是我们三个人对这方面的一个小贡献．

伍鸿熙

1985 年 5 月于加州

致读者的话

> “你们的事业的成长，应该像一棵树的成长一样。应该是顺其自然、无间断、和全面的。我希望你们的根能够在这个学院的肥沃土地下面尽量深入，以使你们的树干长得既粗且壮。这样，将来无论树叶多么茂盛丰满，也永不会有水份供应不暇的毛病。在上空将不时会有狂风大雨，也会有行雷闪电。所以切勿长得太快太高。”

以上的一段话，是当代英国演员罗伦士奥利维亚在 1947 年 Old Vic 戏剧学院开幕典礼中，向学生致词的一部份。这几句话对你们是有特殊意义的。因为这本书是一本很初步的书。如果你们有意细读这本书的话，则最少要弄清楚从这本书中你们能够得到什么。目前一般研究生心目中，最迫切的问题似乎是：有没有一个可以写一篇文章的小题目？因此我要先此声明：这本书不讨论这一类的小题目。我写这本书的原意，只是希望能使“你们的根尽量向下面深入”。以后是否开枝发叶，就只能看你们自己的努力和天赋。书内所讨论的题目，都是一般的和基础性的，而且也是任何一个几何学家所熟悉的。要是你们能够好好掌握这几个基本性的概念，并且在将来能对几何学有一个比较全面的理解，则日后自然能够挑一些有意义的大题目来做。急功好利、只顾眼前的收获、和只找易做的小题目来写文章，这都不是一个数学工作者所应有的态度。这本书应该是你们向前迈进的踏脚石之一。我希望你们很快就会超过这本书的范围。

每一本书的作者都有一点和一个魔术师相同的地方，就是希

望观众或读者所看见的一切，刚好是他希望他的读者或观众所看见的一切．那么在我心中，幻想你们能够从这本书中看到的是什么呢？

第一，你们会了解书内的定义和定理都既是人为的，又同时是合理的．也许你们认为一本书要写得高深莫测，才能显出作者的学问渊博．但是我却希望你们会觉得书中的一切，不但是理所当然，而且是容易得只要肯化一点功夫就可以自己做出来的．要做到这一点，除了一般的"定义→定理→证明"基本形式以外，我设法多加一些按语来说清楚每个主要定义和主要定理的来龙去脉和直观意义．另一方面我也要指出，书内的概念和结果所以被认为是基本性的，并不是因为某某权威说过是如此如此，而是因为经过时间的考验后，发现确切是如此的．就是说，从经验的总结，我们现在知道这些概念和定理是有用和必需的．所以一个初学者应该致力于探求为什么所学的是有用的和必需的，否则不能对所学有一个全面的了解．这种治学态度，其实不单是适用于数学上，而是适用于一切学问的领域上的，包括社会科学在内．

其次，我希望你们能够把握全书的要点，同时也能把握每个定理、每个证明和每个概念的要点．一本好的数学书应该不同于一本字典．在后者当中每一个字都占有同等的地位．但是如果说这本书内无数的定义、定理和证明都是同样重要的，就未免荒谬无稽了．比方说，弧长的二次变分公式只是一个一般性的技巧性结果，要点在于弄清楚如何将它应用于具体的情况，而不在于探讨这个公式本身的深度或研究这个公式的推导．所以不应该只算出这个公式而不给应用，更不应该把这个公式当作主要定理之一．又比如，Synge 定理的证明看来是相当累赘的．但是如果从一个很直观的事实作出发点，就是"任何一个非单连通的紧致黎曼流形上必存在一个非同伦于零的最短闭曲线"，则其它一切都是顺理成章的了．所以我希望你们能够培养一个习惯，总要问：这本书的要点

何在？这一章的要点何在？这个证明的要点何在？能找到所有这些问题的答案，才能说有真正的了解。

最后，我希望你们能够完全以直观的眼光去了解这本书的内容。所有数学书都是充满了技术性的术语的，因为为了要表达清楚，作者毫无选择的余地。但是一个数学工作者的思考，大部份时候是靠直观（甚至是过份简化的直观）的想法来向前推进的。在几何学上这一点尤其是重要。所以书内这一类直观的讨论，比其它的数学课本会多一点。也许你们还迷信所谓"数学严格性"，以为数学上最重要的是每一步推论的正确性。这个论点，相当于说鲁迅文章的好处，主要是在于每句话都写得很通顺。我希望你们不会犯这个"见小不见大"的毛病。

当然以上三点只是我个人的幻想。现实和幻想的距离可能很大。但是当知道我的意图之后，希望你们能够用自己的想像力来填补这本书的不足之处。

我讲这个课的时候，刚好和奥运会重合。由于祖国在奥运会上的丰收，自然引起了"为什么中国数学家不能拿数学界的金牌"的问题。于是"拿金牌"这个口号不胫而走，暑期中心的同志们人人面上都挂了同一个问号："中国在什么时候才拿数学界的第一面金牌？"这个问题后来甚至在杂志、报章上也被提出来了。这个想法实在很具有刺激性。若是真能把一门严肃的学问当作一种体育比赛，以后可以玩的花样就多得不可想像。比方说，人民日报第一页可能有如下的标题："Poincaré 与高斯在拓扑场上激战，Poincaré 大胜，五比零。"又或："群论决赛，Abel 苦战 Galois，不幸以二比三败北"等等。不过我猜想提倡在数学上"拿金牌"，主要的用意也不过是作为一种鼓励罢了。这个用意自然是很好的，但是，这个口号却不幸被人误解，以为学数学的最终目的，不外是拿一个什么奖之类。这就和古代"十载寒窗，一举成名"的封建思想，有太多重合之处了。你们一定很清楚地认识到，在你们自

己这一代当中，这种功利主义的想法已是与日俱增，犯不着再用“金牌”作为鼓励了。我觉得比较值得做的事，倒是鼓励你们去培养一种“实事求是，为这门有悠久历史的学问尽一己之力”的学者风度。只是这件事一说开来就不是三言两语所能够说清楚的，而且恐怕也有一些说教的味道。所以我还是回过头来和你们讨论数学罢。

“拿金牌”的另一个用意，就是举出一个目标，希望大家朝这个方向走。从一个数学工作者的立场看来，这个做法似乎不够彻底。如果真要坚持这个观点，就不如索性举出最伟大的数学家作为年青人的榜样。古语云：“取法乎上，得法乎中。”根据学问远胜于我的人的看法，数学史上登峰造极的数位，还要数十九世纪的高斯，黎曼，Abel，Poincaré 等等。Hermann Weyl 在 1944 年写 Hilbert 的悼文时就说过，伟大如 Hilbert，他的学术成就还不及高斯和黎曼。但也是 Weyl，毫不含糊地加上一句话：“在我们(即 Weyl 本人)这一代当中，并没有一个能够和 Hilbert 相比的数学家。”Weyl 是被公认为本世纪数一数二的数学家，同时也许是数学史上最后的一个全才。可是从他这个评价，就可以了解为什么要是想攀登数学的高峰，就非要拿这些十九世纪的大师们作榜样不可。要认识他们的成就，就得要念他们的全集。如果只谈“拿金牌”而不谈这个明显的事实，则无形中变成鼓励年青人“取法乎中”，结果自然“得法乎下”。这就和提倡这个口号的原意脱节了。

你们一定以为“向大师们学习”，只是一句说来动听而不切实际的话。这是可以理解的。毕竟年青人爱时髦，看的文章总是要愈新愈好。所以一、二十年前的文献已是有过时之嫌，更惶论十九世纪的文章？可是这个提法是无需我来辩护的，因为有才学远超过我的人来代替我这样做。在我作研究生的时候，有一次去听 André Weil 演讲。他一开头就说年青人一定要找高斯，Euler 等

第一流数学家的全集来读. 在这方面，**Weil** 是一个言行一致的人. 1947 年有一段时间他的情绪低落，但从翻阅高斯的文集中得到启发，因而作了一连串的猜想.这就是支配了过去三十年来代数几何发展的"Weil 猜想". 其实相像的例子是太多了. 与其多举，不如推荐下列数篇文章，让你们自己亲身体验罢:

（一）高斯创造近代曲面几何学的文章: Disquisitiones generales circa superficies curves. 这篇文章最近刚有新的英文翻译和注释. 请阅 P. Dombrowski, 150 Years After Gauss' Disquisitiones ···, *Astérisque*, Vol. 62, *Soc. Math. France*, 1979.

（二）黎曼创造"黎曼几何"的短文: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. 这篇文章的英文翻译和详细的解释可在本书参考文献 [S8, II] 中找到.

（三）Poincaré 创造代数拓扑的一系列文章:

Analysis situs, J. École Polytechnique (2) 1 (1895), 1—121;

1ʳ Complément, *Rend. circ. mat. Palermo* **13**(1899), 285—343;

2ᵈ Complément, *Proc. London Math. Soc.* **32**(1900), 277—308;

3ᵉ Complément, *Bull. Soc. Math. France* **30**(1902), 49—70;

4ᵉ Complément, *J. Math. Pure Appl.* (5) **8**(1902), 169—214;

5ᵉ Complément, *Rend. circ. mat. Palermo* **18**(1904), 45—110.

这些文章都是你们基本上能够看懂的. 同时我也可以保证，它们是会使你们感觉无限鼓舞的.

最后我们再回到"拿金牌"这个问题罢. 一般人以为参加奥运

会的唯一目的就是拿金牌．去年李宁拿了三面金牌，举国称庆，而童非一面也拿不到．所以用"拿金牌"的尺度来衡量，成功和失败的分野，真是一目了然．但是"金牌得主"的李宁，他个人的想法又是怎么样呢？ 你们可以去图书馆翻看他在 1984 年底发表在报章上，以"童非是真正的英雄"为题的文章，就可以看到另外一个观点．其实参加体育竞赛，或者是钻研数学，也只不过是人生的一部份而已．探求人生的意义，是我们至死的一天都学不完的大学问．下面录出的两段话，也许足以提供一些与众不同的看法给大家作参考． 第一段是近代奥运会始创人 Pierre de Coubertin 说的：

运动的目的不在胜利而在竞争，
人生的意义不在克服而在奋斗．

另一段则是古代希腊奥运会的格言之一：

切勿要求胜利，只应要求有一往无前的勇气．因为从坚忍不拔的奋斗中，你将为自己带来荣誉，但更重要的，你将为全人类带来光荣．

伍鸿熙

1985 年 6 月于北京大学

目　录

内容简介

本书是黎曼几何的一本入门教材．本书从黎曼度量及联络出发，介绍了黎曼流形研究中的各种基本概念和技巧．以测地线的研究为重点讨论了各种形式的比较定理和 Morse 指数定理，同时还介绍了子流形几何学．书中也勾划了近代微分几何中的一些重大成果：如球面定理、正质量猜想以及几乎平坦流形等；最后还列举了当今微分几何研究中一些尚待解决的问题．

本书可供大学、师范院校数学系高年级选修课教材以及研究生教材，也可供数学工作者参考．

北京大学数学丛书

黎曼几何初步

伍鸿熙 等著

责任编辑：邱淑清

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168 毫米　32 开本　10.25 印张　244 千字

1989 年10月第一版　1989 年10月第一次印刷

印数：0001—1050 册

ISBN 7-301-00804 X/O·143

定价：2.55 元

§ 1　线性联络，黎曼度量和平行移动

本节参考文献

[GKM]，　§ 2.1，§§ 2.5-2.7.

[S8，I]，　第 9-1 页至第 9-16 页.

[S8，II]，　第 6-1 页至第 6-17 页.

[M1]，　§ 8.

关于本书所讨论的课题，我们想先说几句．为此先列出下列式子：

微分几何⊂微分拓扑⊂点集拓扑.

这里记号"⊂"表示研究对象的集合之包含关系．细说起来，点集拓扑研究的是一般拓扑空间，微分拓扑研究 C^∞ 流形，而微分几何处理的则是 C^∞ 流形，并带有某种附加结构．这里所谓的附加结构可以是一个黎曼度量，也可以是一个联络，或是一个张量场．研究对象越少，研究的方法和结果就越多．例如在微分拓扑中惯用的微积分算法在点集拓扑学中就不能用．上面的式子粗糙地勾划了微分几何与其他数学分支的关系．

微分几何的核心是关于流形上黎曼度量的研究，这就是所谓的**黎曼几何**．本书讨论的正是黎曼几何．

读本书之前，我们假定读者对微分流形已有初步的了解(例如[CC] 中第一，二，三章)，并且熟悉大学微分几何教材(关于 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面的理论).

C^∞ 流形M上一个**黎曼度量** g 是什么呢？我们帮助大家回忆一下定义．g 是一个"C^∞ 指定"．"指定"的含义就是对于M的每

一个切向量空间 $M_x(x\in M)$，指定 M_x 中一个向量内积 $g_x(\ ,\ )$（有时把 $g_x(\ ,\ )$ 记为 $\langle\ ,\ \rangle_x$，类似地有时记 $g(\ ,\ )$ 为 $\langle\ ,\ \rangle$）。所谓指定是 C^∞ 的，那表示：对 M 的任意一个局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$，如令

$$g_{ij}(x)=g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

则这些 $g_{ij}(x)$ 是坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的 C^∞ 函数。在此提请注意：$g_x(\ ,\ )$ 是内积这一事实就相当于矩阵 $[g_{ij}(x)]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是正定对称的。如果用张量的语言来说，g 其实就是 M 上一个 C^∞ 二阶共变张量场，并且具有下列性质：对 M 中任意向量场 X,Y，有

$$g(X,Y)=g(Y,X),\quad g(X,X)\geqslant 0.$$

并且 $g_x(X,X)=0$ 的充要条件是 $X(x)=0$。值得注意，C^∞ 流形上总可找到一个黎曼度量（参阅 [CC]，第 133 页定理 1.1）。

着手研究黎曼度量之前，先谈谈"**联络**"，从概念的复杂程度上讲这是较为简单的。联络是什么呢？至少有四种不同但彼此等价的说法来阐述它（参阅本节的附录或 [S8，II] 5—8）。现在我们先给它一个直观的描述：联络者就是使我们得以对流形上向量场进行"**微分**"的一种手段。让我们沿用这种直观的方式来阐明它的形成背景。我们是研究**微分**几何的，所以能对向量场做微分自然是头等重要的事，于是上面说的联络势必为一个最重要的概念。看看在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中是如何微分一个向量场的（这当然是大家熟悉的）。简单说来，如果 v 是 $p\in\boldsymbol{R}^n$ 处一个向量，f 是 p 点附近的一个可微函数，那么**方向导数** $\mathrm{D}_v f$ 是可以定义的，它就是一个实数

$$\mathrm{D}_v f=\lim_{t\to 0}\frac{f(p+tv)-f(p)}{t|v|}.$$

现设 X 是 p 点附近的一个向量场，于是 X 可表为 n 个 C^∞ 函数 $X=(X^1,\cdots,X^n)$，其中 X^i 是由等式

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

所确定的，$(x^1,\cdots,x^n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的自然坐标．这时向量场X沿v的导数就定义为

$$\mathrm{D}_v X \equiv (\mathrm{D}_v X^1, \cdots, \mathrm{D}_v X^n),$$

即

$$\mathrm{D}_v X = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}_v X^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$\mathrm{D}_v X$ 有下列显见的性质(这些性质只不过是函数的方向导数性质的翻版)：

(a) $\mathrm{D}_{\alpha v} X = \alpha \mathrm{D}_v X, \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$;

(b) $\mathrm{D}_v(fX) = (\mathrm{D}_v f)X + f\mathrm{D}_v X, \quad \forall$ 函数 f;

(c) $\mathrm{D}_v(X_1 + X_2) = \mathrm{D}_v X_1 + \mathrm{D}_v X_2, \quad \forall$ 向量场 X_1, X_2;

(d) $\mathrm{D}_{v+v'} X = \mathrm{D}_v X + \mathrm{D}_{v'} X, \quad \forall$ 向量 v, v'.

只做形式计算时，(a)—(d) 正是我们关于 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量场的微分运算所需知道的全部性质．当然我们还知道

$$\mathrm{D}_v \frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

可是这个性质不能推广到微分流形的情形，只能割爱了．上述讨论稍做改变如下：如果V是p的邻域中一个向量场，使得 $V(p) = v$，则定义一个向量场 $\mathrm{D}_V X$ 为：

$$(\mathrm{D}_V X)(p) = \mathrm{D}_v X.$$

于是 (a)—(d) 变为

(C1) $\mathrm{D}_{fV+gW} X = f\mathrm{D}_V X + g\mathrm{D}_W X$;

(C2) $\mathrm{D}_V(fX) = (\mathrm{D}_V f)X + f\mathrm{D}_V X$;

(C3) $\mathrm{D}_V(X + Y) = \mathrm{D}_V X + \mathrm{D}_V Y$,

其中 V, W, X, Y 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中向量场，f, g 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数．

综合起来，上面讨论的要点是：在 $\boldsymbol{R}^n$ 中给定向量场V和

X，我们可以定义**方向导数** $D_V X$，它依旧是向量场并具有性质(C1)—(C3)。

现在让我们置身于微分流形的情形．设 V，X 是流形 M 上向量场．在 M 的任一个坐标邻域内(其内的坐标函数是 $x^1,\cdots,x^n$)，V 与 X 可看做是 $\boldsymbol{R}^n$ 中某开集上的向量场，于是在这个坐标邻域内可以搬用 $\boldsymbol{R}^n$ 的情形来定义 $D_V X$，它是此坐标邻域内的向量场．很自然地设想：将各个坐标邻域内如此定义出的向量场，拼成 M 上整体定义的向量场，从而给出 M 上的 $D_V X$。可是这是行不通的，麻烦出在上述局部定义的 $D_V X$ 依赖于坐标函数的选取．假若在坐标邻域 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 内分别具有坐标函数 $\{x^i\}$ 和 $\{y^i\}$。当 $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}\neq\varnothing$，按照上述办法，$D_V X$ 在 $\mathscr{U}$ 中就应是

$$D_V X=\sum_i (D_V f^i)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $X=\sum_i f^i\frac{\partial}{\partial x^i}$。在 $\mathscr{V}$ 中就应是

$$D_V X=\sum_i (D_V g^i)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中 $X=\sum_i g^i\frac{\partial}{\partial y^i}$. 如果设想它们能拼起来，就表示在 $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$ 中有

$$\sum_i (D_V f^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_i (D_V g^i)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

不幸的是，这个式子几乎总不能成立．因为如果它成立，则必有

$$\sum_i (D_V f^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_i (D_V g^i)\frac{\partial}{\partial y^i}=\sum_{i,j} (D_V g^j)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

即

$$D_V f^i=\sum_j (D_V g^j)\frac{\partial x^i}{\partial y^j},\quad \forall i \tag{1.1}$$

由 $X=\sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_i g^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ 得

$$g^j=\sum_k f^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}, \quad \forall j \tag{1.2}$$

将(1.2)代入(1.1)得

$$D_V f^i=D_V f^i+\sum_{k,j} f^k\left(D_V \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}, \quad \forall i,$$

从而有

$$\sum_{k,j} f^k\left(D_V \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}=0 \tag{1.3}$$

由于 $\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}=\delta^i_k$ (这里 δ^i_k 是 Kroneker 记号),故

$$\sum_{k,j} f^k\left(D_V \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$$
$$=\sum_{k,j} f^k D_V\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)-\sum_{k,j} f^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} D_V\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right).$$

将此式与(1.2)代入(1.3)即得

$$\sum_j g^j\left(D_V \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)=0, \quad \forall i. \tag{1.4}$$

容易写出具体例子使(1.4)不成立,从而在 $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ 中分别定义的 $D_V X$ 不能拼起来,前面的设想就失败了.

习题1. 给出合适的 X, V, $\{x^i\}$, $\{y^i\}$, 使(1.4)不成立.

上面冗长而曲折的分析是想告诉读者,要定义M上的 $D_V X$,不可机械地将 $\boldsymbol{R}^n$ 中那个"方向导数"搬过来.须知能搬过来的东西是微分流形结构本身所蕴含的,所以想要定义出M上的 $D_V X$,无疑要在M上附加一个异于微分结构的结构.干脆设想这个附加结构不多不少正是 $D_V X$.它自然很像 $\boldsymbol{R}^n$ 中的方向导数,不过又不能太像,以后称之为**联络结构**.数学中定义一个东西有时采用**"优先权"的方法**,这就是把我们最急于知道的关于那个东西的性质做为定义.例如$\sqrt{2}$定义为有理数列 $\{q_i\}$ 的等价类,其中 q_i^2

越来越接近 2. 我们现在采用此法定义联络.

定义 C^∞ 流形 M 上的一个**联络**就是对每一对 C^∞ 向量场 V, X，指定一个新的 C^∞ 向量场 $D_V X$，使得它具有方向导数拥有的那三条性质 (C1)—(C3)。 在 (C1)—(C3) 中出现的 $D_V f$ 理解为 Vf。

上述定义表明联络是 $\boldsymbol{R}^n$ 中方向导数概念的推广. 换句话说，$\boldsymbol{R}^n$ 中的方向导数是一个特殊的联络 (**标准联络**). 为了进一步弄清联络的定义，我们加一些注记.

注记 1. "**联络**"一词，顾名思义，该是联系着一些东西罢. 究竟联系什么呢? 答案是 M 中各点的切空间. 这一点将在以后做详细解释.

注记 2. 给定一个联络之后，人们把向量场 $D_V X$ 称为 X 沿 V 的**协变导数**. 因此 D 有时称为**协变微分**. **协变**二字可字面地理解为: 随着坐标系的改变而变化. 我们知道在经典的文献中不管去做什么都要在局部坐标系中进行，而我们现在定义 D，没有动用局部坐标系.

注记 3. 这里我们称之为的联络，在经典文献中有时称为**线性联络**，以区别于**仿射联络**，**射影联络**等等. 线性两字用于概括 (C1)，即 $D_V X$ 对 V 是 C^∞ 函数环上线性的. C^∞ **函数环**是 M 上所有 C^∞ 函数构成的，简记为 $\mathscr{F}(M)$ 或 $\mathscr{F}$，这时我们称 $D_V X$ 对 V 是 $\mathscr{F}$ **线性的**.

注记 4. 性质 (C1) 有这样的推论: 如果 V 和 W 是 M 上的向量场，使得对某 $x \in M$，$V(x) = W(x)$，那么

$$(D_V X)(x) = (D_W X)(x).$$

习题 2. 证明上述结论.

因注记 4，对于任意 $v \in M_x$，我们可定义 $D_v X$ 如下: 任取 M 上向量场 V，使 $V(x) = v$，则令 $D_v X \equiv (D_V X)(x)$，这时的 $D_v X \in M_x$.

注记 5. 令 $\mathscr{V}(M)$ 是M上 C^∞ 向量场的集合,它是 C^∞ 函数环 $\mathscr{F}$ 上的模. 如果我们固定一向量场 V, 由 $X \longmapsto D_V X$ 确定的映射 $D_V: \mathscr{V}(M) \to \mathscr{V}(M)$ 不再像注记3所述那样了. 它不是 $\mathscr{F}$ 线性的,因为性质 (C2) 只能保证这个映射是模的一个导算子. 正由于这个缘故, 类似于注记4的现象不存在, 即如果 $t \in M_x$, $V \in \mathscr{V}(M)$, 我们不可能用扩张 t 为一个M上向量场T的法子来定义 $D_V t$.

习题3. 在 R^n 上造向量场 V, T_1, T_2, 使得对某 $p \in R^n$, $T_1(p) = T_2(p)$, 但是 $(D_V T_1)(p) \neq (D_V T_2)(p)$.

尽管如此,某个稍微弱些的结论还是成立的,并且很有用. 这就是.在一个具有联络的流形M上,任取 $v \in M_x$ 和一条曲线 $\gamma: [0, \varepsilon) \to M$, 使得 $\dot{\gamma}(0) = v$, 这里 $\dot{\gamma}(0)$ 表 γ 的切向量. 另外设 X, Y 是M上两个向量场,它们限制在γ上相等,即

$$X(\gamma(t)) = Y(\gamma(t)), \quad \forall t \in [0, \varepsilon),$$

那么

$$D_v X = D_v Y. \tag{1.5}$$

为证明此事,可取 x 附近的坐标系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$,令

$$X - Y = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

由于 (C2),

$$D_v(X - Y) = \sum_i (vf^i) \frac{\partial}{\partial x^i}(x) + \sum_i f^i(x) \left(D_v \frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x).$$

又由于 $f \circ \gamma \equiv 0$, 这导致

$$vf^i = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = 0,$$

从而 $D_v(X - Y) = 0$. 这便证出(1.5).

(1.5)有一个重要推论: 如果 $\gamma: [0, a] \to M$ 是一条曲线, X 是M上向量场,那么 $D_{\dot{\gamma}(0)} X$ 由 $X \circ \gamma$ 完全决定. 容易猜到这里的记号 $X \circ \gamma$ 就是X在γ上的限制.

注记 6. 联络的存在性. 联络定义为对向量场做微分的手段，自然要问联络是否存在？首先注意到，局部存在性是易证的. 在任意局部坐标邻域中总可以把欧氏空间的方向导数拿来当作局部联络，即如果 $\{x^i\}$ 是坐标函数，

$$X=\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

可令

$$\mathrm{D}_V X=\sum_i (VX^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

至于整体存在性问题，因下列引理而成为显见的了.

引理 1 一个流形上所有联络的集合是一个**凸集**，即如果 $\mathrm{D}^1,\cdots,\mathrm{D}^k$ 皆是联络，又若 $f_1,\cdots,f_k$ 是 C^∞ 函数，具有性质

$$\sum_{i=1}^k f_i=1,$$

那么 $\sum_{i=1}^k f_i\mathrm{D}^i$ 也是一个联络.

证明 只须验证(C1)--(C3)即可. 请注意，关于 $\sum_{i=1}^k f_i=1$ 的假设对证明 (C2) 是必须的.

(注意：联络的集合不是一个向量空间，因为任意形如 $\sum_i f_i\mathrm{D}^i$ 的和式可能无性质 (C2)，其中 $f_i\in \boldsymbol{R}$.)

现在我们就来证明任意微分流形必具有一个联络. 令 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 M 的坐标邻域的集合，它构成 M 的局部有限覆盖. 取 $\{\varphi_i\}$ 是一个 M 的 C^∞ **单位分解**，它从属于 $\{\mathscr{U}_i\}$ (参阅[CC]第 88 页). 对于任意的 i，取 D^i 是 $\mathscr{U}_i$ 中的一个联络(这样的 D^i 是存在的，前面已经说过. 不妨就将 $\boldsymbol{R}^n$ 中方向导数搬过来)，用类似于上面的引理，可知 $\sum_i \varphi_i\mathrm{D}^i$ 是 M 的一个联络.

注记 7. 上一注记不仅表明流形上总存在联络，也表明联络是太多了！因此如果不进一步限制，一般联络的研究便没多大意思。数学中，人们必须选出有趣的对象做深入研究。作为第一次挑选，人们能借助黎曼度量挑出一个颇有意思的联络，这在下一段要细讲的。但是稍稍展望一下，就连这样的挑选也不够味，因为黎曼度量本身也是太多了。因此不是所有为黎曼度量挑出的联络都值得研究。所以进一步的挑选则是在所有黎曼度量中选出较有意思的度量，这将在 § 4 中讨论。

现在我们来确定一个独特的联络，它是唯一地依赖于M上的黎曼度量g的。

命题 2 对M上给定的 g，存在M上唯一的联络 D 满足：对M上任意向量场 X, Y, Z,

(L1) $X\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$;

(L2) $D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0$.

证明 这个命题的证明极易找到，例如 [GKM] 中第 82 页，[CE] 中第 2 页，[KN, I] 中第 160 页，[H4] 中第 71 页或 [M1] 中第 48 页。因此我们现在着重谈证明的主要想法。

首先证明唯一性。在具坐标函数 $\{x^i\}$ 的坐标邻域内，由下式定义一组 C^∞ 函数 Γ^i_{jk},

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{1.6}$$

为了证明D的唯一性，只须证明 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ 由 g 唯一确定。这用下列的一个**经典的技巧**来证。通常令

$$g_{ij} \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle,$$

由 (L1) 便有

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle$$

$$+\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle$$

$$=\left\langle \sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_l \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle$$

$$=\sum_l g_{lk}\Gamma^l_{ij} + \sum_l g_{jl}\Gamma^l_{ik}.$$

采用约定：一单项式中重复的上、下指标表示按此指标从 1 至 n 求和，于是上式可写为

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = g_{lk}\Gamma^l_{ij} + g_{jl}\Gamma^l_{ik}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{1.7}$$

又由（L2）可知

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]$$

$$= \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

即有

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant n. \tag{1.8}$$

那个经典的技巧就是将(1.7)中指标 i, j, k 轮换得到新的等式，而后将新旧等式做代数和。细说之，由(1.7)得

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = g_{li}\Gamma^l_{jk} + g_{kl}\Gamma^l_{ji}, \tag{1.7$'$}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{lj}\Gamma^l_{ki} + g_{il}\Gamma^l_{kj}. \tag{1.7$''$}$$

将(1.7)，(1.7)$'$，(1.7)$''$加减并将(1.8)代入，得

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g_{lk}\Gamma^l_{ij},$$

换个写法就是

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \tag{1.9}$$

其中 g^{ij} 是由等式 $g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j\,(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$ 唯一确定的.至此便证明了 $\{\Gamma_{jk}^i\}$ 由 g 唯一确定.至于满足 (L1) 与 (L2) 的D的存在性,此时便很容易证了。因为对于每一个坐标函数为 $\{x^i\}$ 的坐标邻域 $\mathscr{U}$,由(1.9)确定 Γ_{ij}^k。若 X, Y 是M上向量场,在$\mathscr{U}$ 中

$$X=\sum_i f^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_i h^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

则在 $\mathscr{U}$ 中令

$$D_XY=\sum_{i,j}f^i\left(\frac{\partial h^j}{\partial x^i}+\sum_l h^l\Gamma_{il}^j\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

不难验证这样定义 D_XY 是合理的,即 $\mathscr{U}$ 中坐标函数有众多选择,但用上述办法定义出的向量场 D_XY 彼此相等,从而确定一个定义在M上的向量场 D_XY。接着再来验证: D是一个联络,又满足 (L1) 与 (L2)(我们把具体的验证留给读者作为习题),于是这个D便是命题所求的了。

我们现急于让大家注意到上述命题及它的证明中出现各个量的名称。满足 (L1),(L2) 的联络D是在1917年第一次被 Levi-Civita 发现的(严格而言,在 Levi-Civita 的发现中,(L1)与(L2)是被一个等价的几何性质所代替,这就是下面将说的“平行移动”的性质)。后来在1918年被 Weyl 澄清并叙述成差不多上面写的形式。现在它被称为度量 g 的 Levi-Civita **联络**。不幸在文献中它也被称为 g 的**黎曼联络**,虽然黎曼本人连做梦也未想到过它(黎曼死于1866年)。人们也许正经地问,为什么当今的几何学家要在 Levi-Civita 的领地内违背史实地偏好黎曼呢? (须知黎曼的伟大无须求助于这种值得怀疑的光荣.)不管如何解释,我们还是写下这样一句话:关于对事实的这样歪曲,在数学中其实比泛泛觉察到的更为普遍。言归正传,(1.6)中 Γ_{ij}^k 通常称为**联络系数**或D相对于 $\{x^i\}$ 的分量(不管D是不是一个度量的 Levi-Civita 联络)。Γ_{ij}^k 用 $\{g_{ij}\}$ 的表达式(1.9)归功于 Christofell (1869),所

以 Levi-Civita 联络的 Γ_{ij}^k（由(1.9)给出）称为 Christofell **记号**.

我们来把(1.9)写为不借用坐标系的形式，即对于任意向量场 X, Y, Z,

$$\langle D_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle\}. \quad (1.10)$$

虽然(1.10)蕴含(1.9)，这只要令 X, Y, Z 分别是 $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^j}$, $\frac{\partial}{\partial x^k}$ 即可. 至于(1.9)蕴含(1.10)也不难证，只须在坐标邻域内将 X, Y, Z 写成 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 的线性组合，用(1.9)来验证(1.10)的两边相等. 使用起来等式(1.10)较(1.9)方便多了. 例如在M的一个开集中给定**幺正标架场** $X_1, \cdots, X_n$, 即处处有 $\langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij}$, 那么由(1.10)直接给出

$$\langle D_{X_i} X_j, X_k\rangle = \frac{1}{2}\{\langle X_k, [X_i, X_j]\rangle + \langle X_j, [X_k, X_i]\rangle - \langle X_i, [X_j, X_k]\rangle\}, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant n.$$

这等式完全确定 Levi-Civita 联络.

习题 4. 假定我们知道下列事实：在 $\boldsymbol{R}^4$ 中的 3 维球面 S^3 上存在三个处处线性无关的向量场 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 使得

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}, \quad [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}.$$

（这使你想起了什么东西呢？）现在我们令 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为幺正，于是就在 S^3 上引进了黎曼度量，试算出这个度量的 Levi-Civita 联络.

（学过李群的读者就晓得，S^3 是单李群，上述定义的黎曼度量其实就是 S^3 上由 Killing 型决定的**双不变度量**. S^3 上的李代数展现为上面的方括号关系. 这个李代数同构于 $\boldsymbol{R}^3$ 中通常向量叉积构成的李代数. 参阅[CE]第三章.）

这一注记已经写得很长了，它告诉我们在所有联络之中有一

类特别的联络，称 Levi-Civita 联络．可是为了说清它们的意义，我们忍不住还得多写一点．

我们来定义黎曼流形M中子流形N上的**诱导度量**概念．设g是M的黎曼度量，那么N上黎曼度量可如下定义：如果 X，Y 是N的向量场，令 $\bar{g}(X, Y) = g(X, Y)$（请验证如此定义的 $\bar{g}$ 真是N上一个黎曼度量)，这个 $\bar{g}$ 称为**诱导度量**．特别地，如果N是M的开子集，那么 $\bar{g}$ 恰是g在N上的限制．

习题5．设M是黎曼流形，有黎曼度量g和它的 Levi-Civita 联络 D，又设N是M的子流形．用下列办法定义N上一个联络 $\bar{\mathrm{D}}$：对于任意 $x \in N$，令 $P: M_x \to N_x$ 是**正交投影**．对于N的切向量场 X，Y，定义

$$\bar{\mathrm{D}}_X Y = P(\mathrm{D}_X Y).$$

试证：

(1) 如此定义的 $\bar{\mathrm{D}}$ 是N的一个联络，即满足 (C1)—(C3)，

(2) $\bar{\mathrm{D}}$ 是诱导度量 $\bar{g}$ 的 Levi-Civita 联络．

习题5的一个特别情形（即 $M = \boldsymbol{R}^n$）是非常重要的．首先看到 $\boldsymbol{R}^n$ 有一个自然的黎曼度量，俗称**平坦度量**．相对于它而言，坐标向量场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 处处幺正．或可说 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 是平坦度量的幺正标架场．把度量称为"平坦的"，其原因将在§2中讨论．以后我们总认为 $\boldsymbol{R}^n$ 带有平坦度量．易验证这个平坦度量的 Levi-Civita 联络恰是本节开始所提到的通常的方向导数．于是习题5给出N上 Levi-Civita 联络的几何意义．这个几何意义在$\boldsymbol{R}^3$ 中曲面理论里是特别惹人注目的．顺便说一句，读者应当时常用$\boldsymbol{R}^3$中曲面来检验自己对一般理论的理解程度．

现在解释 Levi-Civita 联络的定义方程 (L1) 与 (L2)．只要有联络，管他有没有黎曼度量，写下 (L2) 式总是可以的，并且解释此式也特别简单．易见 (L2) 等价于

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant n,$$

其中 Γ_{ij}^k 是D相对于局部坐标系 $\{x^i\}$ 的分量．这表明 Γ_{ij}^k 对下

指标 i, j 是对称的,于是 (L2) 本质上是一个对称性的要求.正因为如此,满足 (L2) 的联络称为是**对称的**,在文献中也称为是**无挠**的. 后一称呼出自于一个联络的**挠率张量**概念. 设D是一个联络,对于任意向量场 X, Y, 令

$$T(X, Y) \equiv \mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X - [X, Y].$$

易证 $T(X, Y)$关于 X, Y 是$\mathscr{F}$线性的,从而T是一个张量,称为**挠率张量**. 这时 (L2) 就相当于挠率张量为零,这就解释了把(L2) 称为无挠的原因. 这里,我们必须承认似乎没有一小点理由称T为"挠"率张量.完全不像与T造型类似的**曲率张量**(§ 2 将谈及),挠率张量是没有几何意义的,它在引出后便被束置高阁了.

解释 (L1) 更为要紧. 让我们来看看 M 上一个一般的联络D,我们的直接目标是说明联络究竟联系着什么,而后再解释(L1). 设 $\gamma:[a, b]\to M$ 是一条**嵌入曲线**,并且它的像集 $\gamma([a, b])$ 在一个坐标邻域内,坐标函数是 $\{x^i\}$, 又设X是沿着γ的向量场,即对任意 $t\in[a, b]$, $X(t)\in M_{\gamma(t)}$, 同时 $X(t)$ 是 t 的 C^∞ 函数. 由于γ是嵌入,X 可以 C^∞ 扩张为 M 上向量场 $\tilde{X}$,即有

$$\tilde{X}(\gamma(t)) = X(t), \quad \forall t\in[a, b].$$

由上面的注记 5,$\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}\tilde{X}$ 不依赖于X的扩张 $\tilde{X}$. 因为这个缘故,我们总把它写为 $\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}X$ 而不赘述X到 $\tilde{X}$ 的扩张过程.

问题 什么情况下 $\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}X = 0$, $\forall t\in[a, b]$?

让我们把 $\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}X = 0$ 写清楚. 记

$$\dot\gamma(t) = \sum_i \dot\gamma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t)),$$

$$X(t) = \sum_i X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t)),$$

令

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}X &= \sum_j \mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}\left(X^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma(t))\right) \\
&= \sum_j \frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma(t)) + \sum_j X^j(t)\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma(t)) \\
&= \sum_k \left(\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i,j}(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)\dot\gamma^i(t)X^j(t)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}(\gamma(t)).
\end{aligned}
$$

从而 $\mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}X = 0$ 就相当于

$$
\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t}(t) + \sum_{i,j}(\Gamma^k_{ij}\circ\gamma)\dot\gamma^i(\gamma(t))X^j(\gamma(t)) = 0,\ \forall k. \quad (1.11)
$$

这是线性常微分方程组，它的未知量是向量

$$
X = \begin{bmatrix} X^1(t) \\ \vdots \\ X^n(t) \end{bmatrix},
$$

因此当给定 $v \in M_{\gamma(a)}$，就唯一存在一个解 $X_v(t)$ 使得

$$
X_v(a) = v, \quad \mathrm{D}_{\dot\gamma(t)}X_v = 0.
$$

(**注意**：方程组 (1.11) 的线性性在此是关键，它保证在整个区间 $[a, b]$ 上有解. 如果(1.11)是非线性的话，那就只能知道在 a 的某一邻域 $[a, a+\varepsilon)$ 内可解。)

一个沿 γ 的向量场 X 称为是沿 γ **平行的**，如果 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}X = 0$. 假若给定 $\gamma:[a,b]\to M$，我们称向量 $w \in M_{\gamma(b)}$ 是向量 $v \in M_{\gamma(a)}$ 沿 γ **平行移动**的结果，如果存在一个沿 γ 的**平行向量场** X，使得

$$
X(a) = v, \quad X(b) = w.
$$

关于"平行"，"平行移动"的字面意义将在下面的例子中说明. 上面证明的事表明：如果 $\gamma:[a, b]\to M$ 是一条嵌入曲线且在一坐标邻域内，任给 $v \in M_{\gamma(a)}$，则存在唯一的 $w \in M_{\gamma(b)}$，使得 w 是 v 沿 γ 平行移动的结果. 如果 $\gamma:[a,b]\to M$ 仅是一条**浸入曲线**(注意这个 γ 的像集还可能不在一个坐标邻域内)，那么我们可以分割 $[a, b]$ 为若干段 $[a, a_1]$，$[a_1, a_2]$，$\cdots$，$[a_k, b]$，使得 γ 限

制在每一小段上是某坐标邻域内的嵌入曲线．如果 $v\in M_{\gamma(a)}$，我们可沿 $\gamma|_{[a,a_1]}$ 平行移动 v 得 $v_1\in M_{\gamma(a_1)}$，再沿 $\gamma|_{[a_1,a_2]}$ 平行移动 v_1 得 $v_2\in M_{\gamma(a_2)}$，继续做下去，便得 $w\in M_{\gamma(t)}$.

命题 3 设 $\gamma:[a,\ b]\to M$ 是一条浸入曲线，$v\in M_{\gamma(a)}$，则唯一存在沿 γ 的平行向量场 X，使得 $X(a)=v$. 从而唯一存在 $w\in M_{\gamma(b)}$，它是 v 沿 γ 平行移动的结果.

对于每条浸入曲线 $\gamma:[a,b]\to M$，这个命题使我们能定义一个映射 $P^\gamma:M_{\gamma(a)}\to M_{\gamma(b)}$，使得 $P^\gamma(v)$ 就是 v 沿 γ 平行移动所得的那个 $w\in M_{\gamma(b)}$. 我们断言：P^γ 是向量空间的同构. P^γ 的线性性来自于线性常微分方程组的解线性依赖于初值. 至于 P^γ 是同构，则只消考虑 γ 的**"反向"曲线**

$$\xi:[a,b]\to M:t\longmapsto\gamma(a+b-t),$$

有

$$\dot\xi(t)=-\dot\gamma(a+b-t),\quad \xi(a)=\gamma(b),\quad \xi(b)=\gamma(a),$$

以及

$$\mathrm{D}_{\dot\xi(t)}X=-\mathrm{D}_{\dot\gamma(a+b-t)}X.$$

所以如果 X 是沿 γ 平行的向量场，那么它也是沿 ξ 平行的. 这样一来，$w\in M_{\gamma(b)}$ 是 $v\in M_{\gamma(a)}$ 沿 γ 平行移动的结果当且仅当 v 是 w 沿 ξ 平行移动的结果. 这表明 $P^\xi:M_{\gamma(b)}\to M_{\gamma(a)}$ 是 P^γ 的逆，从而 P^γ 是同构.

对于任意的曲线 $\gamma:[a,b]\to M$，也可定义 $P^\gamma:M_{\gamma(a)}\to M_{\gamma(b)}$. 这时须对方程 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}X=0$ 中 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}X$ 作新的理解及讨论（见本节后面的评注 3）. 我们称这里的 P^γ 为**平移同构**.

值得注意，联系于曲线 γ 的同构 P^γ 在大多数情形非常地依赖于 γ 的选取，而不只仅仅依赖于 $\gamma(a)$ 与 $\gamma(b)$. 以后将给出的一些非常简单的例子表明沿着具有共同始、终点的两条曲线的平移同构是不相等的. 马虎说来，如果一个黎曼流形的 Levi-Civita 联络的平移同构只与曲线的端点有关，与整条曲线本身无

关，那么这个黎曼流形恰是具平坦度量的 $\boldsymbol{R}^n$. 精确的叙述可看 [KN, I] 第89页的定理 8.1，[S8, II] 第 6-21 页的定理 11.

例 设 $\boldsymbol{R}^n$ 具有平坦度量，它的 Levi-Civita 联络照常规记为D. 因为

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \delta_{ij},$$

于是由(1.7)与(1.9)得

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0, \quad \forall i, j.$$

对于任意一条曲线 $\gamma:[a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ 及沿着 γ 的向量场 X，公式(1.11)化为

$$\frac{\mathrm{d}X^k}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \forall k,$$

所以 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}X = 0$ 当且仅当 X^k 是常数. 这表明 X 沿 γ 平行当且仅当 X 是通常字面理解的平行向量场. 这就解释了前面诸定义中出现的"平行"一词的含义.

现在我们回答前面说的那个问题：联络究竟联系着什么呢？设D是M上一个联络，令 x，y 是M中给定的两个点，用一条曲线 γ 连接 x 与 y 后，D 便给出一个平移同构 $P^\gamma: M_x \to M_y$. 在这个意义上，D 联系着M上任意两个切空间 M_x 与 M_y，只要预先固定一条连接 x 至 y 的曲线就行了. 这就回答了问题. 这个回答的要紧之处在于：如果在一个微分流形M上，任意一条连接 x 至 y 的曲线 γ 确定一个同构 $\Phi^\gamma: M_x \to M_y$，并且这些同构 Φ^γ 满足一些显然的要求，那么就在 M 上存在唯一的一个联络 D，使D的平移同构 P^γ 恰是 Φ^γ. 关于这方面较详细的讨论可在本节末了的附录里找到. 所以直观上讲，一个联络就是所有曲线两端处切空间的同构集合.

现在可以回来解释 (L1) 了. 设 M 是黎曼流形，D 是 Levi-

Civita 联络. 回想一下每一 M_x, $x\in M$, 皆是一个内积空间. 我们断言: (L1) 等价于所有平移同构皆是内积空间的等距同构. 为了证明此事,先设 (L1) 成立,又设 $\gamma:[0,1]\to M$ 连接 $x=\gamma(0)$ 至 $y=\gamma(1)$. 令 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 M_x 的幺正基. 对于任意 i, 令 $e_i(t)=P^{\gamma|[0,t]}(e_i)$, 即 $\nabla_{\dot\gamma(t)}e_i(t)=0$. 由 (L1) 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle e_i(t),e_j(t)\rangle=\dot\gamma(t)\langle e_i(t),e_j(t)\rangle$$

$$=\langle\nabla_{\dot\gamma(t)}e_i(t),e_j(t)\rangle+\langle e_i(t),\nabla_{\dot\gamma(t)}e_j(t)\rangle=0,$$

所以

$$\langle e_i(t),e_j(t)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij},\quad\forall t\in[0,1].$$

因为 $P^\gamma(e_i)=e_i(1)$, 故 P^γ 将 M_x 的幺正基映为 M_y 的幺正基,从而 P^γ 是一个等距同构. 反之,假定每一个 P^γ 皆是等距同构. 设 X,Y,Z 是任给的向量场,欲证 (L1)只须在一个任意的点 $x\in M$ 来证即可. 令 $\gamma:[0,1]\to M$ 是一条曲线,使得 $\dot\gamma(0)=X(x)$, 令 $\{e_i(t)\}$ 同前, 即每个 $e_i(t)$ 皆是沿着 γ 的平行向量场. 因 P^γ 是等距同构,故 $\{e_i(t)\}$ 是 $\gamma(t)$ 处幺正基. 设

$$Y(\gamma(t))=\sum_i Y^i(t)e_i(t),\quad Z(\gamma(t))=\sum_i Z^i(t)e_i(t),$$

于是

$$X(x)\langle Y,Z\rangle=\dot\gamma(0)\langle Y,Z\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i Y^i(t)Z^i(t)\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_i\frac{\mathrm{d}Y^i}{\mathrm{d}t}(0)Z^i(0)+\sum_i Y^i(0)\frac{\mathrm{d}Z^i}{\mathrm{d}t}(0)$$

$$=\langle \mathrm{D}_{\dot\gamma(0)}Y,Z\rangle+\langle Y,\mathrm{D}_{\dot\gamma(0)}Z\rangle$$

$$=\langle \mathrm{D}_{X(x)}Y,Z\rangle+\langle Y,\mathrm{D}_{X(x)}Z\rangle,$$

证毕.

这样,我们就可以说: 一个黎曼度量的 Levi-Civita 联络是那个唯一的对称联络,它的所有平移同构皆是等距同构.

最后我们再给三点评注来圆满地结束关于一般联络的讨论.

评注 1. D 完全由它的所有平移同构所决定. 较确切地说,当给定 $v\in M_x$ 与一个向量场 X 之后,我们将用平移同构来表示 D_vX. 设 γ 是一条曲线,使得 $\dot\gamma(0)=v$,令 $\boldsymbol{P}_t:M_x\to M_{\gamma(t)}$ 是沿 $\gamma|_{[0,t]}$ 的平移同构,我们断言

$$D_vX=\frac{d}{dt}[\boldsymbol{P}_t^{-1}(X(\gamma(t)))]_{t=0}. \qquad (1.12)$$

要证此事,可取 $e_1,\cdots,e_n$ 是 M_x 的一个基,令 $e_i(t)=\boldsymbol{P}_t(e_i)$. 设

$$X(\gamma(t))=\sum_i X^i(t)e_i(t),$$

那么 (C2) 给出

$$D_vX=D_{\dot\gamma(0)}X=\sum_i\frac{dX^i}{dt}(0)e_i.$$

另一方面 $\boldsymbol{P}_t(e_i)=e_i(t)$, 故

$$\boldsymbol{P}_t^{-1}(X(\gamma(t)))=\sum_i X^i(t)e_i,$$

从而

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{P}_t^{-1}(X(\gamma(t)))]_{t=0}=\sum_i\frac{dX^i}{dt}(0)e_i=D_vX.$$

证毕.

等式(1.12)可以看做前面注记 5 的精确叙述.

评注 2. 平移的概念自然导致讨论具有联络 D 的流形上某类曲线 γ, 它们的切向量场 $\dot\gamma$ 是沿着 γ 平行的. 考察具有以方向导数作为联络的 $\boldsymbol{R}^n$, 沿一条曲线的平行向量场就是通常意义下的平行向量场,于是具有平行切向量场的曲线恰是直线段,并且具有**线性参数**. 对于一般的情形,具有平行的 $\dot\gamma$ 的曲线 γ (即 $D_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$) 被称为是联络的**测地线**. 可见它是带着线性参数的直线的推广. 下面引理告诉我们: 测地线总是存在的, 至少在局部上可

以这么讲．在一个以 $\{x^i\}$ 为坐标函数的坐标邻域内，记 $\gamma=(\gamma^1,\cdots,\gamma^n)$ (即 $\gamma^i=x^i\circ\gamma$)，于是

$$\dot{\gamma}(t)=\sum_i \dot{\gamma}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma(t)),$$

其中

$$\dot{\gamma}^i(t)=\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}(t),\quad \forall i.$$

由(1.11)及 $X=\dot{\gamma}$，可知 γ 是测地线当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma^i}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{j,k}(\Gamma^i_{jk}\circ\gamma)\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\gamma^k}{\mathrm{d}t}=0,\quad \forall i. \tag{1.13}$$

这是一个二阶非线性常微分方程组，所以我们只能保证解的局部存在唯一性．由于可自由地给初值 $(\gamma^1(0),\cdots,\gamma^n(0))$ 和 $(\dot{\gamma}^1(0),\cdots,\dot{\gamma}^n(0))$，故有

引理 4 给定 $v\in M_x$ $(x\in M)$，和一个 M 上联络 D，则局部存在唯一一条 D 的测地线 γ，使得

$$\gamma(0)=x,\quad \dot{\gamma}(0)=v.$$

(1.13) 的非线性性不能保证解的整体存在性，即因之可能没有定义在整个 $\boldsymbol{R}$ 上的解．确实如此，一般来说不能得到测地线的大范围存在性，这从后面给出的例子便能看出．我们自然最感兴趣的是黎曼度量的 Levi-Civita 联络的测地线，这种测地线的切向量必定是等长的．这就是说当 $|\dot{\gamma}|$ 定义为$\sqrt{\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle}$时，那么 $|\dot{\gamma}|$ 是常数．因为 $\mathrm{D}_t\dot{\gamma}=0$，故 $\dot{\gamma}$ 是沿 γ 平行的向量场，平移既然是等距同构，$|\dot{\gamma}|$就必为常数了．从而黎曼度量的一条测地线（确切地说，是黎曼度量的 Levi-Civita 联络的测地线）或是一个点，或是一个一维浸入子流形．除去"是一个点"这类平凡情形外，测地线是黎曼流形的一类特别的一维子流形，因此值得认真研究，正如人们要研究环中的理想，群中的正规子群等一样． 本书的大部分篇幅用来研究黎曼流形的测地线和曲率．

例 设 $M=\boldsymbol{R}^2-\{(0,0)\}$,具有平坦度量的 $\boldsymbol{R}^2$ 给出 M 上诱导度量，M 上的曲线

$$\gamma:(-1,1)\to M:\ t\longmapsto(t+1,0)$$

是测地线，但它不能扩张到$[-1,1)$上，因此显然不能扩张到整个 $\boldsymbol{R}$。

评注 3．这是关于联络要谈的最后一点．对于以后在流形上讨论曲线，曲线族等是很重要的，在这里将引进“**诱导联络**”的概念．首先考察联络概念的一个不足之处．设 γ 是 M 中一条曲线，X 是沿 γ 的一条 C^∞ 向量场，在上面讨论沿 γ 平行移动或 γ 是测地线的条件时，我们或明或暗地总要假定 γ 是一条嵌入的曲线，其原因在于当初我们定义 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}X$ 时，须要将沿 γ 的 X 扩张到 M 上，成为 C^∞ 向量场的缘故．须知 M 中 γ 的像集有自交点时，X 在交点处就可能不是单值的，它根本就不是 M 中子集上的向量场．就算你用局部扩张 X 的办法克服了这一困难，可是当 $\dot\gamma(t)$ 为零时，要想在 $\gamma(t)$ 附近扩张 X 常常也是不可能的．这样一来假定 $\dot\gamma$ 处处不为零自然是避免不了的．但是很幸运，用一个“诱导联络”的概念，可以无须假定 $\dot\gamma$ 处处不为零，而关于 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}X$ 的算法在形式上却还能保留下来．诱导联络概念在[S8，II]第 6-7 页至 6-11 页，[M1]中 §8，[CE]中第 3 至 4 页有仔细的讨论．设 M 是黎曼流形，N 是微分流形 $\varphi:N\to M$ 是 C^∞ 映射，则我们给出下列定义．

定义 一个从 N 到 $\mathbf{T}M$ 的映射 X 称为是 φ **上的向量场**，如果对于任意 $x\in N$，$X(x)\in M_{\varphi(x)}$。

如果 X 是 N 上向量场，一般说来 $\mathrm{d}\varphi(X)$ 不再是 M 上向量场了，可是它是 φ 上向量场．可见这个概念值得引进．

对于一个 φ 上向量场 X 和 $v\in N_x$，在 $\varphi(x)$ 的一个邻域 $\mathscr{V}$ 内取标架场 $\{E_1,\cdots,E_n\}$，于是对任意 $y\in\varphi^{-1}(\mathscr{V})$，有

$$X(y)=\sum_i X^i(y)E_i(\varphi(y)),$$

令

$$\widetilde{\mathrm{D}}_v X=\sum_i\{(vX^i)(x)E_i(\varphi(x))+X^i(x)\mathrm{D}_{\mathrm{d}\varphi(v)}E_i\},$$

其中D是 M 的 Levi-Civita 联络.容易验证上面定义 $\widetilde{\mathrm{D}}_v X$ 的方法是合理的,即与 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 的选取无关.

定义 上述的 $\widetilde{\mathrm{D}}_v X$ 称为**诱导联络**.

定义 设 V 为 N 上的向量场, X 为 φ 上的向量场,则定义 $\widetilde{\mathrm{D}}_V X$ 为 φ 上的向量场,使得

$$(\widetilde{\mathrm{D}}_V X)(x)=\widetilde{\mathrm{D}}_{V(x)}X.$$

习题 6. 设D是 M 上的 Levi-Civita 联络,则 $\widetilde{\mathrm{D}}_V X$ 具有下列性质:

(1) 对任意 N 上向量场 X, Y,

$$\widetilde{\mathrm{D}}_X\mathrm{d}\varphi(Y)-\widetilde{\mathrm{D}}_Y\mathrm{d}\varphi(X)-\mathrm{d}\varphi([X,Y])=0;$$

(2) 设 V, W 是 φ 上向量场, $u\in N_x$, 则

$$u\langle V,W\rangle=\langle\widetilde{\mathrm{D}}_u V,W\rangle+\langle V,\widetilde{\mathrm{D}}_u W\rangle.$$

作为一个应用,我们用诱导联络定义 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma$. 设 $\gamma:[0,1]\to M$ 是一条曲线, $\dot\gamma=\mathrm{d}\gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 是 γ 上向量场,则令

$$\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma\equiv\widetilde{\mathrm{D}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\dot\gamma.$$

当 γ 是嵌入曲线时,此处的 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma$ 与过去的定义一致. 我们在此一劳永逸地做个申明: 在本书后面出现的联络记号,假若按联络的原意说不清时,请一律按诱导联络来理解.

附 录

在这个附录里,我们讨论在流形 M 上定义联络的另外两个方法. 其一是用**平移同构**,另一是**纤维丛法**.

假设给定一个联络D，设γ是M上连接x至y的曲线（注意，不必是浸入曲线），于是就有平移同构 $P^{\gamma}: M_x \to M_y$. 我们就来考察平移同构的性质. 如果ζ是一条连接y至z的曲线，令$\gamma\zeta$是一条串连曲线，即先γ后 ζ，于是显然有

(K1) $P^{\gamma\zeta} = P^{\zeta}\circ P^{\gamma}$, $\forall \gamma, \zeta$.

令$-\gamma$ 是γ的反向曲线，易见经一个参数的线性改变之后 γ 表为 $\gamma:[-a,a]\to M$, $-\gamma$ 表为 $-\gamma:[-a, a]\to M$ 使得

$$(-\gamma)(t) = \gamma(-t).$$

当γ是浸入曲线时，我们已知道下列的（K 2）成立，对一般的γ也有

(K2) $P^{-\gamma} = (P^{\gamma})^{-1}$.

设γ在 一C^∞ 族的曲线中变动，那我们也就希望 P^{γ} 是一C^∞ 族的同构. 此事须说得确切些. 设 $\mathscr{U}$ 是 R^n 的一个开子集，$\gamma:\mathscr{U}\times[0,1]\to M$ 是一个 C^∞ 映射，于是每一$u\in\mathscr{U}$，便确定一条曲线 $\gamma_u:[0, 1]\to M$，使得

$$\gamma_u(t) = \gamma(u, t).$$

这样的$\{\gamma_u\}$是一族曲线，C^∞ 依赖于参数 $u\in\mathscr{U}$. 现令 $\mathbf{T}M$ 是 M 的切丛，$X:\mathscr{U}\to \mathbf{T}M$ 是 C^∞ 映射，使得 $X(u)\in M_{\gamma(u,0)}$，即 X是 $\gamma|_{\mathscr{U}\times\{0\}}$ 上的向量场. 这时我们断言：由 $u\longmapsto P^{\gamma_u}(X(u))$ 确定的映射 $\mathscr{U}\longmapsto \mathbf{T}M$ 是 C^∞ 的. 这断言直接由(1.11)的解 C^∞ 依赖于参数u及初值这一事实推得（参阅[KN, I]的附录1）. 为简单计，我们叙述这结论如下：

(K3) P^{γ} 以 C^∞ 方式依赖于 γ.

最后还有一条关于 P^{γ} 的基本性质，它不是太显然的. 设γ与ζ是两条出自x点的曲线，并且**一阶密切**，即

$$\gamma(0) = \zeta(0) = x, \quad \dot\gamma(0) = \dot\zeta(0),$$

那么我们断言：P^{γ} 与 P^{ζ} 也是一阶密切的. 这意思是说：如果$V_\gamma(t)$与$V_\zeta(t)$分别是γ与ζ的平行向量场，使得 $V_\gamma(0)=V_\zeta(0)$，

那么相对于任意的坐标系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\gamma\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V_\zeta\Big|_{t=0}.$$

此事实直接从方程(1.11)推出，因为在不讲自明的记号下有

$$\frac{\mathrm{d}V_\gamma^k}{\mathrm{d}t}=-\sum_{i,j}(\Gamma_{ij}^k\circ\gamma)\dot{\gamma}^iV_\gamma^j,\quad\forall k,$$

$$\frac{\mathrm{d}V_\zeta^k}{\mathrm{d}t}=-\sum_{i,j}(\Gamma_{ij}^k\circ\gamma)\dot{\zeta}^iV_\zeta^j,\quad\forall k.$$

总结之便有

(K4) 如果曲线 γ, ζ 一阶密切，则 P^γ 与 P^ζ 也一阶密切.

现在我们来给**联络的第二种定义**. 假设在流形 M 上给出一个同构系 $\{P^\gamma: M_{\gamma(0)}\to M_{\gamma(1)}\}$，其中 γ 跑遍所有曲线 γ: $[0, 1]\to M$,我们有

定理 5 如果 $\{P^\gamma\}$ 满足 (K1)—(K4),则存在 M 上唯一的联络 D,使得这些 P^γ 就是D的平移同构.

证明 用(1.12)来定义 D. 由于 (K4), 只要 $\dot{\gamma}(0)=v$,那么(1.12)的右式不依赖 γ 的选取,因此 D_vX 是可以定义的. 如果 X, Y 是 C^∞ 向量场,因为 (K3), 由 $(\mathrm{D}_XY)(x)=\mathrm{D}_{X(x)}Y$ 定义的 D_XY 也是 C^∞ 向量场. 容易从(1.12)推出D具有性质(C1)—(C3). 也许只有 (C1) 的一部分证起来有点麻烦,现在我们就来证明. 即要证明:

$$\mathrm{D}_{v+w}X=\mathrm{D}_vX+\mathrm{D}_wX,$$

其中 $v,w\in M_x$, X 是 C^∞ 向量场. 由 $\varphi(v)=\mathrm{D}_vX$ 定义一个映射 φ: $M_x\to M_x$. (K3) 确保 φ 是 C^∞ 的,显然有

$$\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v),\quad\forall\lambda\in\boldsymbol{R}.$$

下面习题 7 表明 φ 必是线性的,故有

$$\mathrm{D}_{v+w}X=\mathrm{D}_vX+\mathrm{D}_wX,\quad\forall v, w\in M_x.$$

这样一来我们便证明了D是一个联络．至于D的平移同构恰是$\{P^\gamma\}$一事，可容易从(1.12)及(K1)--(K4)得到．

习题7． 假设 $\varphi:R^n\to R^n$ 是一个 C^∞ 映射，满足

$$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x),\quad \forall\lambda\in R,$$

则φ是线性的．(**提示：用 Euler 的齐次函数公式．**)

请注意上面定理的基本内容是这样一个事实．由(C1)—(C3)定义的一个联络是一个"联系"同构系$\{P^\gamma\}$的无穷小说法．用$\{P^\gamma\}$描写联络无疑更为直观，但是由(C1)—(C3)定义的联络从技术上讲使用起来更便当．这就说明为什么联络的第一种定义几乎普遍地为人们采用．

下面我们讨论**联络的第三种定义，**即**联络的纤维丛定义．**为此假定读者知道一些**主纤维丛．**我们打算说明，从我们已经对联络的了解可以完全不费力气便达到联络的纤维丛定义．(参阅[KN, I]中第63页，[S8, II]中第8-7页，[BC]中第75页)．历史上这种定义首先被E. Cartan所想像到了，不过Cartan不具备必要的拓扑语言来确切地表现它，目前写得准确清晰实际上非Cartan所为．这种定义的严格陈述直到1950年才被Ehresmann给出．

给定一个流形M，令$B(M)$是标架丛，即
$B(M)=\{(x,e):x\in M,e=(e_1,\cdots,e_n)$是$M_x$的一个标架$\}$，在$B(M)$上配以通常的微分结构(见[S8, II]第8章)．设M上有一个联络D，我们现在指出，对给定的一条曲线$\gamma:[0,1]\to M$使得$\gamma(0)=x$，又对给定的$(x,e)\in B(M)$，存在一个"**自然的提升**"$\tilde\gamma:[0,1]\to B(M)$使得$\pi(\tilde\gamma)=\gamma$，其中$\pi:B(M)\to M$是由$\pi(x,e)=x$定义的投射．实际上的做法是我们令$\tilde\gamma(t)=(\gamma(t),e(t))$，这里$e(t)=(e_1(t),\cdots,e_n(t))$，对任意$i$，$e_i(t)$是沿$\gamma$平行的向量场，且$e_i(0)=e_i$，$e_i(t)\in M_{\gamma(t)}$．这个提升有一条根本的性质，叙述为下面的(1.14)．

先回忆一下，GL$(n, \boldsymbol{R})$ 是 $n\times n$ 阶非退化实矩阵构成的群，由下面规则

$$(x,(e_1,\cdots,e_n))a=\left(x,\left(\sum_i a_1^i e_i,\cdots,\sum_i a_n^i e_i\right)\right)$$

给出 GL$(n, \boldsymbol{R})$ 在 $B(M)$ 上右作用，其中

$$a=[a_j^i]_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}).$$

于是对任意 $a\in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$，便有 C^∞ 映射

$$R_a: B(M)\to B(M):\ (x, e)\longmapsto (x, e)a.$$

当给定 $\gamma(0)\equiv x$ 与 (x, e) 时，记 $\tilde{\gamma}_{(x,e)}$ 与 $\tilde{\gamma}_{(x,e)a}$ 是 γ 的两个自然提升，使得

$$\tilde{\gamma}_{(x,e)}(0)=(x, e),\quad \tilde{\gamma}_{(x,e)a}(0)=(x, e)a.$$

因为平移是向量空间的同构，故有

$$R_a(\tilde{\gamma}_{(x,e)})=\tilde{\gamma}_{(x,e)a}. \tag{1.14}$$

现在固定 $x\in M$ 与 $(x, e)\in B(M)$。考虑所有满足 $\gamma(0)=x$ 的曲线 $\gamma:[0, 1]\to M$，以及对应的提升 $\tilde{\gamma}_{(x,e)}$，使得

$$\tilde{\gamma}_{(x,e)}(0)=(x, e).$$

当 $\dot{\gamma}(0)$ 跑遍 M_x 中所有向量时，$\dot{\tilde{\gamma}}_{(x,e)}(0)$ 在 $B(M)_{(x,e)}$ 中就填满一个子集合 $H_{(x,e)}$，这里 $B(M)_{(x,e)}$ 是 $B(M)$ 在 (x,e) 处的切空间。我们断言：$H_{(x,e)}$ 是 $B(M)_{(x,e)}$ 中一个 n 维子空间。为证此断言，选 M 的坐标函数 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 使得 x 是坐标球 $\mathscr{U}=\left\{\sum_i (x^i)^2<1\right\}$ 的球心。我们称 ζ：$[0, 1)\to\mathscr{U}$ 为一条**径向线段**，如果 $\zeta(t)=tA$，其中 $A\equiv(A_1,\cdots, A_n)$ 满足 $\sum_i A_i^2=1$。现在定义一个映射 $\phi:\mathscr{U}\to B(M)$ 如下：令 $\phi(0)=(x,e)$，对于 $y\neq 0$，$y\in\mathscr{U}$，存在唯一的径向线段 ζ 和一个常数 $t>0$，使得 $y=\zeta(t)$，则又令 $\phi(y)=\tilde{\zeta}_{(x,e)}(t)$。由于 (K3)，$\phi$ 是 C^∞ 的。$d\phi: M_x\to B(M)_{(x,e)}$ 将 $\dot{\zeta}(0)$ 映为 $\dot{\tilde{\zeta}}_{(x,e)}(0)$，故 $d\pi(d\phi(\dot{\zeta}(0)))=\dot{\zeta}(0)$，这就表明 $d\phi$ 是非退化的，从而

$$\dim \mathrm{d}\phi(M_x) = n.$$

下面我们证明 $\mathrm{d}\,\phi(M_x) = H_{(x,e)}$. $\mathrm{d}\,\phi(M_x) \subset H_{(x,e)}$ 是显然的. 对于任意 $\dot{\tilde{\gamma}}_{(x,e)}(0) \in H_{(x,e)}$, 总有径向线段 ζ, 使得 $\dot{\zeta}(0)$ 与 $\dot{\gamma}(0)$ 平行, 由 (K4) 知, $\dot{\tilde{\zeta}}_{(x,e)}(0)$ 与 $\dot{\tilde{\gamma}}_{(x,e)}(0)$ 也平行, 从 $\dot{\tilde{\zeta}}_{(x,e)}(0) \in \mathrm{d}\phi(M_x)$ 就推出 $\dot{\tilde{\gamma}}_{(x,e)}(0) \in \mathrm{d}\,\phi(M_x)$, 于是便有

$$H_{(x,e)} \subset \mathrm{d}\,\phi(M_x).$$

这就证明了 $H_{(x,e)} = \mathrm{d}\,\phi(M_x)$, $H_{(x,e)}$ 是 n 维子空间.

现在我们写下这些子空间 $H_{(x,e)}$ 的基本性质:

(H1) 所有上述子空间的和集 $\bigcup_{(x,e)\in B(M)} H_{(x,e)}$ 是 $B(M)$ 的切丛的 C^∞ 子丛, 记做 $\boldsymbol{H}$;

(H2) $H_{(x,e)} \oplus V_{(x,e)} = B(M)_{(x,e)}$, $\forall (x, e) \in B(M)$, 其中 $V_{(x,e)}$ 是从 $B(M) \to M$ 的纤维在 (x, e) 点处的切空间;

(H3) $\mathrm{d}\,R_a(H_{(x,e)}) = H_{(x,e)a}$, $\forall a \in GL(n, \boldsymbol{R}), (x, e) \in B(M)$.

(H1) 从(K3)推出, (H3)从(1.14)推出. 注意到 $\mathrm{d}\pi(H_{(x,e)}) = M_x$, 故 $B(M)_{(x,e)}$ 是 $H_{(x,e)}$ 与 $V_{(x,e)}$ 的线性和. 容易验证

$$\dim B(M)_{(x,e)} = \dim H_{(x,e)} + \dim V_{(x,e)},$$

所以 (H2) 成立.

从 $\{H_{(x,e)}\}$ 的定义可见, 这些子空间的和集是以无穷小方式描述从 M 中任意点出发的平移. $\mathrm{T}B(M)$ 中满足 (H1)—(H3) 的子丛 $\boldsymbol{H}$ 被称为 $B(M)$ 上的联络. 我们已经看到 M 上一个联络 D 自然导出一个 $B(M)$ 上的联络 $\boldsymbol{H}$. 现在欲证明反过来也对, 即满足 (H1)—(H3) 的 $\boldsymbol{H}$ 唯一决定 M 上的一个联络 D, 使得 D 按上述方式诱导出的 $\{H_{(x,e)}\}$ 恰是 $\boldsymbol{H}$.

由于本附录中的定理, 故只须证明对 M 中每一条曲线 $\gamma:[0, 1] \to M$, 皆可造出一个同构 $P^\gamma: M_{\gamma(0)} \to M_{\gamma(1)}$, 使之满足(K1)—(K4) 即可. 令 $x = \gamma(0)$, 设 $e = (e_1, \cdots, e_n)$ 是 M_x 中任意

一个标架，借助给定的 $\boldsymbol{H}\subset \mathbf{T}B(M)$ 可造一个 γ 的唯一提升 $\tilde{\gamma}$，使得

$$\tilde{\gamma}:[0,1]\to B(M),\quad \tilde{\gamma}(0)=(x,e),$$

并且

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0)\in \boldsymbol{H}_{\tilde{\gamma}(t)}.$$

(我们认为，这里的做法一点也不奇怪，只不过是重蹈旧辙罢了.)解一个群 GL(n, $\boldsymbol{R}$) 中简单的常微分方程就可得 $\tilde{\gamma}$ (见 [KN, I] 中第 69 至 70 页，[S8, II] 中第 8-20 页至第 8-21 页)．一旦解出 $\tilde{\gamma}$，便有

$$\tilde{\gamma}(1)=(\gamma(1),(f_1,\cdots,f_n)).$$

我们定义 $\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}:M_{\gamma(0)}\to M_{\gamma(1)}$ 为满足下列条件的唯一的线性映射:

$$\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}(e_i)=f_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

由于 $\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}$ 将一标架映为标架，故必是同构．现在来证明 $\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}$ 与 e 的选取无关．假若在 M_x 中选另外一个标架 e'，按上面做法造出提升 $\tilde{\tilde{\gamma}}:[0,1]\to B(M)$，使得 $\tilde{\tilde{\gamma}}(0)=(x,e')$，自然还有 $\dot{\tilde{\tilde{\gamma}}}(t)\in \boldsymbol{H}_{\tilde{\tilde{\gamma}}(t)}$．显然有 $a\in$ GL(n, $\boldsymbol{R}$) 使得 $(x,e)=(x,e')a$，故由 (H3) 得 $\tilde{\gamma}=\tilde{\tilde{\gamma}}\cdot a$．若记

$$\tilde{\gamma}(1)=(\gamma(1),f),\quad \tilde{\tilde{\gamma}}(1)=(\gamma(1),f'),$$

那么 $f=f'\cdot a$，须知 $\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}$ 将 e 映为 f，$\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e'}$ 将 e' 映为 f'，从而 $\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}=\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e'}$．令 $\boldsymbol{P}^{\gamma}=\boldsymbol{P}^{\gamma}_{e}$，现在我们需要证明这些同构 $\{\boldsymbol{P}^{\gamma}\}$ 满足 (K1)—(K4)．这是可以直接办得到的，但是 (K 4) 的验证比较繁．为了避重就轻，我们可以用(1.12)来定义 D，这样来验证 D 满足 (C1)—(C3) (留作习题)，然后从这个附录中定理之前的讨论可知，D 所诱导的平移恰与原来的 $\boldsymbol{P}^{\gamma}$ 重合并满足 (K1)—(K4)．因此得到上述各种定义的等价性.

一个很自然的问题跟着产生了．为什么要用 (H1)—(H3) 如此复杂来定义联络呢？ 该不是庸人自扰吧？ 须知较为简单地用

(C1)—(C3)来定义联络当时已是现成的了．一个原因是：(H1)—(H3) 立即可以推广，也就是说，如果 $\pi:P\to M$ 是一个具有结构群G的主丛，那么 TP 的一个向量子丛 H 定义为是P**上的联络**，只要：(1) H 是一个 C^∞ 子丛，(2) $H_p\oplus V_p=P_p, \forall p\in P$，其中 V_p 是过p点的纤维的切空间，(3) $dR_g(H_p)=H_{pg}, \forall p\in P, g\in G$．由于$G$是一个任意的李群，因此一般说来这个定义没有类似于 (C1)—(C3) 的等价陈述．尽管目前还谈不上这种广义的联络在地道的黎曼几何学中已被证实为绝对重要，可是它在理解示性类的几何上真是有好处的．示性类几何是流形研究中的一个重要章节，这方面的文献多如瀚海，初学者可读［KN，II］第七章，［S8，V］第十三章，［C6］中第97至150页，［NR］．关于这个专题侧重李群方面的，可看［C2］．

关于历史的注记．这节中关于联络基本理论的讲述和此专题的发展历史完全颠倒了．黎曼度量(其实甚至 Finsler **度量**)首次为黎曼在他的1854年就职演讲时引进的．这篇演讲的一个好的译本可在［S8，II］第4A章中找到．(我们鼓励大家去读这个演讲以及［S8，II］第4B章中 Spivak 的评注.)所谓的 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k 是在1869年为 Christoffel 引进的，那是黎曼讲演作为文章发表三年以后的事．Christoffel 用这些记号本质上定义了张量的协变导数，虽然那个时候这个协变微商的概念还没问世哩．这种导数的正式再发现归功于 Ricci，他在1901年与 Levi-Civita 合写的文章中公布了他的这个发现．这就是所谓的**张量分析**．张量分析以其有许多指标昭著于世，不过如果有一些好的想法来对指标做有效控制，则它仍然是一个有高效率的计算工具．用平移定义一个黎曼度量的所谓 Levi-Civita 联络直到1917年才被发现(自然是 Levi-Civita 发现的啰！)这个发现出现在讨论 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面的文章中．在 Levi-Civita 发现背后的几何思想确实令人惊奇，例如［S9］中第 VII 章就以一种易懂的语言描述这种思想．Levi-

Civita 发现的一年之后，Weyl 发表了一篇文章引出了一般联络的概念，这种联络不必依赖于任何一个黎曼度量. 接着他用这种新的概念澄清当时关于黎曼几何的已知成果，特别地，给 Levi-Civita 联络一个恰当的看法.

从教学的角度，本书中关于联络的陈述较之历史发展的进程更为自然，事后诸葛亮想起来，甚至会奇怪为什么联络概念事实上不是这样发现的.（事后诸葛亮常常会问出许多这样的问题.）

正如前面所述，联络的纤维丛说法，最初为 E. Cartan 大概描写了一下，在 1950 年被 Ehresmann 弄得准确了. 我们相信这样的定义在很长一段时间内被认为是几何学中一项实质性突破. 但是三十五年之后，人们仅能说它为微分几何提供了一个很方便的语言（例如描写代表示性类的外微分式和 Yang-Mills 规范场）而未酬众望. 记号 D_XY（或 ∇_XY）在五十年代初为 Koszul 引进的.

§ 2 协变微分和曲率张量

本节参考文献

[S8, II]，第 4D-16 页至第 4D-18 页，第 6-4 页至第 6-6 页，第 6-18 页至第 6-28 页.

[GKM]，§§ 3.6.

[KN, I]，第一章，§ 2.

[H4]，§§ 7.2, 7.4.

为了得到精确的定量结果，我们必须会进行计算，在本节中将考虑最初步的计算. 我们已经看到，在流形 M 上的联络 D 引出了向量场 X 关于另一向量场 V 的协变导数，即 $D_V X$. 现在必须把这种运算推广到张量场，即 $D_V K$，这里 K 是一个任意的张量场. 我们当然可以用代数的方式形式地去做，见 [KN, I]，第一章 § 2 或 [S8, II]，第 6-4 页至第 6-6 页，但这里采用看来似乎比较笨拙，但更为直观的方法去做. 我们将以 § 1 中的恒等式 (1.12) 作为出发点. 用 $K(\gamma(t))$ 来替换该式右端的 $X(\gamma(t))$（K 是一个张量场），且对 P_t^{-1} 重新作适当的解释后，就可获得 $D_V K$ 的定义.

首先回忆，在向量空间 V 与 W 之间给定了一个同构 $\varphi: V \to W$ 后，存在着一个自然的方式能把 φ 推广成在张量代数之间的一个同构

$$\tilde{\varphi}: T^*(V) \to T^*(W),$$

这里

$$T^*(V) = \bigoplus_{r,s} T^{r,s}(V).$$

且对所有非负整数 r 和 s，有

$$T^{r,s}(V)=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s},$$

其中 V^* 是V的对偶空间(同样有 $T^*(W)$)。整数偶 (r,s) 称为 $T^{r,s}(V)$ 中元素的**类型**。设 $\varphi^*:W^*\to V^*$ 是由φ所诱导的在对偶空间之间的伴随同构，即对每一个 $\alpha\in W^*$，有

$$\varphi^*(\alpha)(v)=\alpha(\varphi(v)),\ \forall v\in V.$$

可定义 $\tilde{\varphi}:T^{r,s}(V)\to T^{r,s}(W)$ 如下：对任何 $v_i\in V$，$\alpha^j\in V^*$ 定义

$$\tilde{\varphi}(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^s)$$
$$=\varphi(v_1)\otimes\cdots\otimes\varphi(v_r)\otimes(\varphi^*)^{-1}(\alpha^1)\otimes\cdots\otimes(\varphi^*)^{-1}(\alpha^s),$$

并用线性性质把 $\tilde{\varphi}$ 推广到 $T^{r,s}(V)$ 中所有的元素。这样就以显然的方式定义了同构 $\tilde{\varphi}:T^*(V)\to T^*(W)$(仍用同样的记号来表示)。

现在对 $v\in M_x$，令K为M上的一个张量场，为了定义 $D_vK\in T^*(M_x)$，设γ是M上任何一条使 $\dot{\gamma}(0)=v$ 的曲线，且设

$$\tilde{P}_t:T^*(M_{\gamma(0)})\to T^*(M_{\gamma(t)})$$

是沿 $\gamma|_{[0,t]}$ 的平行移动 P_t 所诱导的同构。定义

$$D_vK\equiv\frac{d}{dt}[\tilde{P}_t^{-1}(K(\gamma(t)))]_{t=0},\tag{2.1}$$

称 D_vK 为K**关于v的协变导数**。上式右端确实是有意义的：如K是一个 (r,s) 型的张量场，则映射 $t\longmapsto\tilde{P}_t^{-1}(K(\gamma(t)))$ 定义了有限维向量空间 $T^{r,s}(M_x)$ 中的一条 C^∞ 曲线，于是可计算导数。

(2.1)中 D_vK 的定义表面上看来非但依赖于 v，也应依赖于曲线 γ，但我们不久将证明(2.1)的右端实际上与γ的选取无关。在证明的同时，将导出 D_vK 的一些最基本的性质。下列四点是显而易见的：

(1) 如K是(r, s)型,则$D_v K$也是(r, s)型。

(2) D_v是作用在张量场代数上的一个导子,即如K_1, K_2为张量场,则

$$D_v(K_1 \otimes K_2) = (D_v K_1) \otimes K_2(x) + K_1(x) \otimes D_v K_2.$$

为了记号简便起见,我们仅在一个特殊情况下给出(2)的证明,一般的证明是完全类似的. 设$K = X \otimes \omega \otimes \rho$,这里$X$是向量场,$\omega$, ρ是1-形式,(2)断言

$$D_v K = (D_v X \otimes \omega \otimes \rho + X \otimes D_v \omega \otimes \rho + X \otimes \omega \otimes D_v \rho)(x). \quad (2.2)$$

为了证明它,设$\{e_1(t), \cdots, e_n(t)\}$是沿$\gamma$的一组平行向量场的基,即每个$e_i(t)$沿$\gamma$是平行的,且对每一$t$, $e_1(t), \cdots, e_n(t)$形成了$M_{\gamma(t)}$的一组基。令$\{\alpha^1(t), \cdots, \alpha^n(t)\}$为沿$\gamma$的1-形式对偶基,即对所有$t$,

$$\alpha^i(t)(e_j(t)) = \delta^i_j, \quad \forall i, j.$$

注意: $\{\alpha^i(t)\}$为沿γ的平行1-形式,即$\forall i$, $\forall t$,有

$$\tilde{P}_t(\alpha^i(0)) = \alpha^i(t).$$

现在记$X(t) \equiv X(\gamma(t))$,等等. 且记

$$X(t) = \sum_p X^p(t) e_p(t),$$

$$\omega(t) = \sum_q \omega_q(t) \alpha^q(t),$$

$$\rho(t) = \sum_r \rho_r(t) \alpha^r(t).$$

由定义(2.1),有

$$D_v K = \sum_{p,q,r} \frac{d}{dt}(X^p(t)\omega_q(t)\rho_r(t))|_{t=0} e_p(0) \otimes \alpha^q(0) \otimes \alpha^r(0)$$

$$= \sum \frac{dX^p}{dt}(0)\omega_q(0)\rho_r(0) e_p(0) \otimes \alpha^q(0) \otimes \alpha^r(0)$$

$$+ \sum X^p(0) \frac{d\omega_q(0)}{dt} \rho_r(0) e_p(0) \otimes \alpha^q(0) \otimes \alpha^r(0)$$

$$+\sum X^p(0)\omega_q(0)\frac{d\rho_r}{dt}(0)e_p(0)\otimes\alpha^q(0)\otimes\alpha^r(0)$$

$=$ (2.1)式的右端，

于是证得了 (2.2). 这段论证的要点是：利用向量场的一组平行基及其1-形式的对偶基来表示一个张量场后，协变导数被化为通常的导数。

(3) D_v 与缩并可交换.

我们仍利用上述特殊情形 $K=X\otimes\omega\otimes\rho$ 来解释(3)的意义. 不妨认为$\mathscr{C}$是在第一和第三个变量之间的缩并（即 $\mathscr{C}K=\rho(X)\omega$)，则(3)断言:

$$D_v(\mathscr{C}K)=\mathscr{C}(D_vK).$$

利用(2.2),这等价于

$$D_v(\rho(X)\omega)=\rho(D_vX)\omega(x)+\rho(X)(x)\cdot D_v\omega$$
$$+[(D_v\rho)(X)]\omega(x). \tag{2.3}$$

(2.3)的证明可利用和证明(2.2)时相同的方式来进行,这里就略去了. (3)的一般情形的证明是类似的.

(4) 由 (2.1) 所定义的 D_vK 仅依赖于 v，而不依赖于曲线 γ.

同样我们只对 $K=X\otimes\omega\otimes\rho$ 的特殊情形证明(4),一般情形下的证明是类似的. 首先,我们知道对任一向量场 X，D_vX 仅依赖于 v，而不依赖于 γ. 现在我们断言：对任何 1-形式 η，$D_v\eta$ 也有同样的结论. 为此，只需证明：对所有向量场 X,$(D_v\eta)(X)$ 仅依赖于 v，而不依赖于 γ. 现考虑张量 $X\otimes\eta$. 由(2)知

$$D_v(X\otimes\eta)=(D_vX)\otimes\eta+X\otimes D_v\eta.$$

由(3)得到

$$v(\eta(X))=\eta(D_vX)+(D_v\eta)(X),$$

或者

$$(D_v\eta)(X)=v(\eta(X))-\eta(D_vX).$$

因为上式的右边仅依赖于 v，而不依赖于 γ，因而对 $(D_v\eta)(X)$ 也有同样的结论．最后，我们看到在(2.2)中，右边仅依赖于 v，而不依赖于 γ，所以对 D_vK 同样结论成立．证毕．

由于(4)的成立，我们现在能对每一个张量场 K 及每一个向量场 X 定义张量场 D_XK 为

$$(D_XK)(x) = D_{X(x)}K, \quad \forall x \in M.$$

注意：D_XK 关于 X 是 $\mathscr{F}$ 线性的，于是我们能对每一个型为 (r, s) 的张量场定义 $(r, s+1)$ 型张量场 DK 为

$$(\omega^1, \cdots, \omega^r, X_1, \cdots, X_s, X) \longmapsto (D_XK)(\omega^1, \cdots, \omega^r, X_1, \cdots, X_s),$$

$$\forall 1\text{-形式 } \omega^i, \ \forall \text{ 向量场 } X_j \text{ 及 } X.$$

DK 称为 K 的**协变微分**．如 f 是一个函数，即(0, 0)型张量，则显然由定义可得

$$Df = df, \tag{2.4}$$

这里右端是 f 的外微分．一般地，我们令

$$D^2K = D(DK), \quad D^3K = D(D^2K), \cdots,$$

等等．

注意．如 X, Y 为向量场，则一般地说

$$D^2K(\cdots, X, Y) \neq D_YD_XK(\cdots),$$

这里"…"表示按照 K 的类型所确定的变量的数目．事实上只要考虑函数 f 的情形．由定义知

$$D^2f(X, Y) = (D(df))(X, Y) = [D_Y(df)](X).$$

由(2)得到

$$D_Y(df \otimes X) = D_Y(df) \otimes X + df \otimes D_YX.$$

再利用(3)后就有

$$YXf = D_Y(df(X)) = [D_Y(df)](X) + (D_YX)f.$$

于是

$$D^2f(X, Y) = YXf - (D_YX)f. \tag{2.5}$$

再谈一些关于 D^2f 的性质．利用 §1 中 (2) 的挠率张量场

$T(X, Y)$ 的定义，我们看到

$$D^2f(X, Y) - D^2f(Y, X) = T(X, Y)f,$$

于是如D是一个对称联络，则 D^2f 是一个对称的二阶协变张量场，即

$$D^2f(X, Y) = D^2f(Y, X).$$

这时称 D^2f 为 f 的 Hessian。

习题1. 在具有标准的（即平坦的）联络的 $\boldsymbol{R}^n$ 上，什么是 C^∞ 函数的 Hessian?

习题2. 在具有联络D的流形M上，张量场K是**平行的**，当且仅当 $DK = 0$. 证明K为平行的充要条件是：对于每一条曲线 $\gamma:[0, 1]\to M$，有

$$\tilde{P}^\gamma(K(\gamma(0))) = K(\gamma(1)).$$

习题3. 设M为具有度量 g，Levi-Civita 联络D的黎曼流形. 注意 g 是二阶协变对称张量. 证明：g 是平行的. （它如何与 §1 中的（L1）相联系?）

本节从现在起，令M为具有度量 g，Levi-Civita 联络D的黎曼流形. 我们将导入两个二阶算子.

首先，如 S 是一个二阶协变对称张量场，我们定义它的**迹** $\operatorname{tr}S$ 为M上的函数，使得在 $x\in M$ 处有

$$\operatorname{tr} S(x) = \sum_i S(e_i, e_i),$$

其中 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 M_x 中的一组幺正基.

习题4. 利用 S 的对称性去证明 $\operatorname{tr} S$ 的定义是与幺正基 $\{e_i\}$ 的选取无关，并证明对每一个如上所述的 C^∞ 张量 S，$\operatorname{tr} S$是一个 C^∞ 函数.

因为 Levi-Civita 联络是对称的(见 §1 中的 (L2))，所以对任何函数 f，D^2f 是一个对称张量. 我们定义

$$\Delta f = \operatorname{tr} D^2f,$$

并称Δ为**作用在函数上的 Laplace 算子**. 在经典的文献中也称Δ为 **Laplace-Beltrami 算子**或**二阶微分算子**. 简单的计算表明，在具有标准联络(即平坦度量的 Levi-Civita 联络)的 $\boldsymbol{R}^n$ 上，

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2},$$

所以Δ是经典的 Laplace 算子。下面的习题给出了Δ的一般的、详尽的公式。虽然若用在以后的 § 12 中所导入的技术，计算能极大地被简化，但现在做这个计算从提高读者计算技能的观点来看将是有益的。

习题 5. 设 f 是具有度量 g 的黎曼流形上的一个 C^∞ 函数。相对于局部坐标系 $\{x^i\}$，设

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad \sum_k g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$$

及G为矩阵 $\{g_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ 的行列式。证明：

(1) $\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij}D^2 f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$;

(2) $\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sum_i g^{ik}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$.

((2) 中的公式表明了Δ是一个二阶线性椭圆型偏微分算子。)

为了叙述第二个算子，我们先回忆：如果X是一个向量场，$\mathscr{T}^*$ 是M上所有张量场对应于 C^∞ 函数的代数所形成的模，则由上述(2)知道，由 $K \to D_X K$ 所定义的映射

$$D_X: \mathscr{T}^* \to \mathscr{T}^*$$

是 $\mathscr{T}^*$ **的一个导子**，即如果 K_1, K_2 为两个张量场，则

$$D_X(K_1 \otimes K_2) = (D_X K_1) \otimes K_2 + K_1 \otimes (D_X K_2). \qquad (2.6)$$

对给定的向量场 X，Y，现在定义映射

$$R_{XY}: \mathscr{T}^* \to \mathscr{T}^*$$

为

$$R_{XY} \equiv -D_X D_Y + D_Y D_X + D_{[X,Y]}.$$

我们称 R_{XY} 为由 X，Y 所定义的**曲率算子**。R_{XY} 具有下列性质：

(1) R_{XY} 是 $\mathscr{T}^*$ 的一个导子;

(2) R_{XY} 保持张量场的类型;

(3) $\forall$ 函数 f, $\forall$ 张量场 K,有

$$R_{(fX)Y}K = R_{X(fY)}K = R_{XY}(fK) = fR_{XY}K;$$

(4) $\forall$ 函数 f, 有 $R_{XY}f = 0$.

为证明(1),我们需要一个代数中的结论,即如果 D_1, D_2 为两个导子,则 Lie 括号 $[D_1, D_2] \equiv D_1D_2 - D_2D_1$ 也是导子. 再加上前面的协变导数 $D_v K$ 的基本性质(2)以及关系式

$$R_{XY} = D_{[X,Y]} - [D_X, D_Y],$$

就可得出(1), (2)得自协变导数$D_v K$的基本性质(1). (3)用常规计算就可证得. (4)是 R_{XY} 的定义的立即推论.

如果Z是M上的另一个向量场,由 (2) 知 $R_{XY}Z$ 是一个向量场,由(3)知 $R_{XY}Z$ 对于每一个变量 X, Y, Z 都是线性的(系数取自 C^∞ 函数). 于是 $R_{XY}Z$ 定义了一个(1, 3)型张量场

$(\omega, X, Y, Z) \longmapsto \omega(R_{XY}Z)$, $\forall$ 向量场 X, Y, Z 及 1-形式ω.

又由

$R(X, Y, Z, W) \equiv \langle R_{XY}Z, W\rangle$, $\forall$ 向量场 X, Y, Z, W,

可定义一个(0, 4)型的张量场. $R_{XY}Z$ 或 $R(X,Y,Z,W)$ 称为黎曼度量的**曲率张量**,或更精确地,称为 Levi-Civita 联络的曲率张量.

出现在数学中的曲率张量几乎是一个神秘的东西. 部分地是因为其名称显示它能够对难以捉摸的"空间弯曲"性质给出一个精确的量度,部分地是因为尽管它看上去很简单,但它似乎控制了黎曼几何的几乎每一个方面(不久读者将会发现这一点), 又部分地因为虽然从过去到现在,人们已化费了极大的努力,但距离完全掌握它还相距甚远. 在 [S8, II] 中, Spivak 化了许多篇幅来对这个定义的历史起源,直观内容,不同情况下它的种种姿态, 等等进行了讨论(如该书第 4A 章到第 4D 章). 这些讨论可能是[S8, I—S8, V] 的最有价值的部分, 值得仔细地阅读. 我们在这里只作出少数几个评论, 而让读者在阅读本书的过程中逐渐去澄清这个概

念的几何内容。

注记 1. 曲率张量是度量的**二阶不变量**. 我们将小心地解释这个术语. 首先,"二阶"是指它包含度量张量 g 的二阶导数. 证明这一点的唯一办法是去计算. 相对于局部坐标系 $\{x^i\}$, 设

$$g_{ij} \equiv g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

及

$$R_{ijkl} \equiv R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right),$$

于是(见 [S8, II], 第 4D-7 页)

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + \sum_{r,s}\left(g_{rs}\Gamma^r_{jk}\Gamma^s_{il} + g_{rs}\Gamma^r_{jl}\Gamma^s_{ik}\right), \tag{2.7}$$

这里 Γ^i_{jk} 是 § 1 中定义的 Christoffel 记号,利用 g_{ij} 可写出 Γ^i_{jk} 的表示式(见 § 1 的(1.9)式). 我们看到, **曲率张量是度量张量的非线性函数**. 这个非线性的性质将成为我们企图理解曲率张量时产生很大困难的部分原因.

其次,要对术语"不变量"作解释. 首先我们定义 C^∞ 映射 φ: $M \to N$ 为黎曼流形之间的一个**局部等距变换**,当且仅当 $\forall x \in M$, $d\varphi: M_x \to M_{\varphi(x)}$ 是相应的内积空间之间的等距变换. 注意,如 φ 是一个局部等距变换,则

$$\dim M = \dim N,$$

且 φ 必须是浸入. φ 称为是**整体等距变换**(或简称**等距**), 当且仅当 φ 除了是局部等距变换外,还必须是一个微分同胚.

习题 6. 试详尽地证明: "等距变换保持 Levi-Civita 联络",即设 $\varphi: M \to M'$ 为黎曼流形之间的一个等距, 设 D, D′ 分别是 M, M' 上的 Levi-Civita 联络,且设 X,Y 及 X', Y' 分别为 M, M' 上的向量场,使得

$$d\varphi(X) = X', \quad d\varphi(Y) = Y',$$

则有

$$d\varphi(D_X Y) = D'_{X'} Y'.$$

通常我们把习题 6 解释成 "Levi-Civita 联络是度量的不变量". 下面的习题 7 给出了"**曲率张量是度量的不变量**"的精确含义.

习题 7. 设 $\varphi: M \to M'$ 为一个等距,且设 R, R' 分别是 M, M' 的曲率张量,则对 M 上的任何向量场 X, Y, Z, W 及 M' 上任何的向量场 X', Y', Z', W',如果满足 $X' = d\varphi(X)$, $Y' = d\varphi(Y)$ 等等,则有

$$d\varphi(R_{XY}Z) = R'_{X'Y'}Z',$$

$$R(X, Y, Z, W) = R'(X', Y', Z', W')\circ\varphi.$$

注记 2. 设 M 为 2 维黎曼流形, 则从曲率张量 R 可引出一个所谓**高斯曲率**的函数 $K: M \to \boldsymbol{R}$, 即给定 $p \in M$, 选取 p 附近的坐标系 $\{x, y\}$, 使得

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p)\right\}$$

为 M_p 的一个幺正基,则

$$K(p) = R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)(p).$$

易证此定义与坐标 $\{x, y\}$ 的选取无关(见下面引理 1).

如 M 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一个曲面, 并配备着从 $\boldsymbol{R}^3$ 的平坦度量所诱导的度量,则 $K(p)$ 正好是曲面论中 M 在 p 处的高斯曲率. 只要利用注记 1 中的(2.7),并对照在任何初等微分几何课本(如 [S8, III] 的第 78 页)中都可找到的关于曲面的高斯曲率的计算公式就可看出这一点. 于是由习题 7 得知,$\boldsymbol{R}^3$ 中等距的曲面(在相应点)具有相同的高斯曲率, 这就是高斯的 Egregium **定理** (Egregium 是拉丁文,绝好的意思). 从这个角度看, 高斯的这个伟大的定理似乎是显而易见的, 然而我们在这里应当赶紧指出的是: 高斯原先并不是像我们上面所做的那样直接用度量来定义他的曲率, 而是借助于 M 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的第二基本形式来定义高斯曲率的, 于是

Egregium 定理确实是一个“绝好”的定理.

注记 3. 前两个注记的内容也给出了如何去理解黎曼在其 1854 年的就职演说中提到的原始的“曲率”概念的关键点. 给定 $p\in M$, 且 2 维平面 $\Pi\subset M_p$, 设 N 是 M 中所有使

$$\gamma(0)=p,\qquad \dot\gamma(0)\in\Pi$$

的测地线的全体. 由 § 3 中的结果可得出: N 事实上是 M 中在 p 点附近的一个 2 维子流形. 于是对每个 Π 可算出 N (在诱导度量下)于 p 处的高斯曲率, 记为 $K(\Pi)$. 黎曼让 Π 在与 M 相切的所有 2 维平面的集合中变动, 并用这些 $K(\Pi)$ 的全体来描述流形的“曲率”(见§ 13, 推论 12).

注记 4. 考虑 $\boldsymbol{R}^2$ 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的自然嵌入, $(x,\ y)\longmapsto(x,\ y,\ 0)$. $\boldsymbol{R}^2$ 的诱导度量当然是**平坦度量**. 称 $\boldsymbol{R}^2$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的“平坦”曲面(“平坦”的术语出现在黎曼在 1854 年的演说之中). 于是自然地去外推这个概念, 并对所有 n, 称 $\boldsymbol{R}^n$ 上通常的度量为**平坦的**. 注意, 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的平坦度量下, 对所有向量场 X, Y, Z, 有

$$R_{XY}Z=0,$$

所以曲率张量恒为零. 反之, 我们在以后的 §4 中将证明: 如黎曼流形 M 的曲率张量为零, 则它必局部等距于配备着平坦度量的 $\boldsymbol{R}^n(n=\dim M)$. 由于这个道理, 如果一个黎曼流形的曲率张量为零, 则称此黎曼流形(或黎曼度量)是**平坦的**.

注记 5. 存在着曲率算子的一个有趣的代数解释. 在黎曼流形 M 上(其实 M 是任何具有联络的流形就够了), 设 V 是 M 上所有向量场相应于实数域 $\boldsymbol{R}$ 的向量空间(通常是无限维的). 设 $\mathscr{D}_{er}$ 是 M 上张量场全体 $\mathscr{T}^*$ 上所有导子所构成的实向量空间. 根据 (2), 由 $\Phi(X)=\mathrm{D}_X$ 所定义的映射 $\Phi: V\to\mathscr{D}_{er}$ 是向量空间中的同态. V 在括号运算 $[X,Y]$ 下, $\mathscr{D}_{er}$ 在括号运算 $[\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2]=\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2-\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1$ 下均为(无限维的)李代数, 因为

$$\Phi([X,Y])-[\Phi(X),\Phi(Y)]=R_{XY},$$

所以曲率算子乃是Φ与李代数同态之间差异的一种很恰切的量度。

现在我们转向对曲率张量的基本事实进行讨论。

引理 1 对所有向量场 X, Y, Z, W，我们有

(1) $R_{XY} = -R_{YX}$;

(2) $R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$ (第一 Bianchi 恒等式);

(3) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$;

(4) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

证明 从 R_{XY} 的定义中立刻可以得到 (1)。为验证 (2)—(4),只需设 $X, \cdots, W$ 为一个局部坐标系中的坐标向量场,这时有(见 § 1 中的 (L2))

$$\begin{cases} D_XY = D_YX \\ R_{XY} = -D_XD_Y + D_YD_X \end{cases} \tag{2.8}$$

于是(2)可直接从(2.8)中得出,而(3)等价于 $R(X,Y,Z,Z) = 0$。由 § 1 中的 (L1),有

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \langle D_XD_YZ, Z\rangle - \langle D_YD_XZ, Z\rangle \\ &= (X\langle D_YZ, Z\rangle - \langle D_YZ, D_XZ\rangle) \\ &\quad - (Y\langle D_XZ, Z\rangle - \langle D_XZ, D_YZ\rangle) \\ &= X\langle D_YZ, Z\rangle - Y\langle D_XZ, Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}X(Y\langle Z, Z\rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle Z, Z\rangle) \\ &= \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z\rangle = 0. \end{aligned}$$

上面最后一步是因为 $[X, Y] = 0$。这就证明了(3)。(4)是(1)—(3)的代数推论(见 [S8, II],第 4D-17 页,或 [KN, I],第 98 页)。

因为 R 是一个张量,且(1)—(4)纯粹是关于 R 的代数结论,所以引理 1 也能等价地对一固定切空间 M_x 中的向量 X, Y, Z, W

予以叙述．这时，对固定的 $X, Y \in M_x$，由 $Z \longmapsto R_{XY}Z$ 所定义的线性变换 $R_{XY}: M_x \to M_x$ 相对于 M_x 上的内积来说，是反对称的(由(3))．进而，考虑定义在 $M_x \oplus M_x$ 上的函数

$$Q(X, Y) \equiv R(X, Y, X, Y),$$

我们称 Q 为 R 的**相配二次型**(关于这个术语可看下面的习题 8)．

引理 2 Q 完全确定了曲率张量．更精确地说，设 R，R' 为张量场，它们都满足引理 1 的条件，如它们的相配二次型 Q，Q' 在 $M_x \oplus M_x$ 上相等，则 $R = R'$．

证明 在［GKM］的第 93 页上给出了一个如何用 Q 来表出 R 的详尽的公式，这当然就证明了引理(在［CE］的第 16 页上也有一个等价的公式)．一个略微较为合理的证明是先去定义 $\tilde{R} = R - R'$，所以 $\tilde{R}$ 的相配二次型 $\tilde{Q}$ 正好是 $Q - Q'$．由假设，$\tilde{Q} = 0$．我们必须去证明 $\tilde{R} = 0$．利用 $\tilde{R}$ 的多重线性性质、条件(1)—(4)以及 $\tilde{Q} = 0$，第一步先去证明：

$$\tilde{R}(X, Y, X, W) = 0, \quad \forall X, Y, W \in M_x.$$

然后再证明：

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = 0, \quad \forall X, Y, Z, W \in M_x.$$

(如感到困难，可参见［KN, I］，第 199 页)．证毕．

把 Q 作下列的归一化后处理起来可能更容易一些．如 Π 是 M_x 的一个 2 维子空间，设 $\{v_1, v_2\}$ 是 Π 的任何一组基．我们定义 Π 的**截面曲率**为

$$K(\Pi) = \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{|v_1 \wedge v_2|^2},$$

这里 $|v_1 \wedge v_2|^2 \equiv |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$ (如通常那样，$|v_i|^2 \equiv \langle v_i, v_i \rangle$，$i = 1, 2$，且 $|v_1 \wedge v_2|$ 即为 $v_1 \wedge v_2$ 关于 $M_x \wedge M_x$ 上内积的范数)．利用引理 1 的(1)—(3)，可直接证明：$K(\Pi)$ 的定义确实与基 $\{v_1, v_2\}$ 的选取无关．特别，如我们利用 Π 的一组幺正基 $\{e_1, e_2\}$ 后，则有

$$K(\Pi) = R(e_1, e_2, e_1, e_2).$$

K是定义在M的2维切平面集合上的一个函数. 由于引理2，知道了所有2-平面Π的截面曲率$K(\Pi)$，就等价于知道了曲率张量(对于知道如何定义切于M的2维平面的Grassmann 从$G_2(M)$的读者来说，$K: G_2(M) \to \boldsymbol{R}$ 是一个确定了曲率张量的C^∞函数). 再加上对函数处理起来总比张量要容易,所以人们通常希望更多地利用K而不是R. 从习题7的观点来看，截面曲率函数K是度量的不变量,即如果$\varphi: M \to M'$是一个等距，Π, Π'分别是M，M'中的2-平面,且有$d\varphi(\Pi) = \Pi'$，则Π与Π'的截面曲率相同.

在上述注记2及3中,我们注意到：对2维黎曼流形M,截面曲率正好是高斯曲率,因而作为推论，$\boldsymbol{R}^3$中的2维单位球面S^2是常截面曲率为$+1$的紧致、单连通黎曼流形. 从下面的习题9知道：$\forall n \geqslant 2$, n维球面$S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$也有常截面曲率,记为$c_n$.以后可以证明：对每一个$n$，有$c_n = 1$. 但是到目前为止,要去确定$c_n$的值并非容易(对$n \geqslant 3$). 当然可以直接去硬算,但这并不是可取的方法. 在一些必要的概念被导入以后,将在下面§4中给出$c_n = 1$的证明. 一般地说，给出了一个度量后要去计算它的截面曲率是一件十分不平凡的事情，除非这个度量存在着某些额外的条件,例如具有高度的**对称性**,即黎曼度量容有许多非平凡的等距变换. 看一下曲率张量的表示式(2.7)的复杂程度就可懂得为什么直接硬算几乎是没有希望的. 由于本书的其余部分极大多数是处理曲率及测地线,所以我们在这里就不再多说了.

习题8. 对每点$x \in M$，证明在$M_x \wedge M_x$上由

$$Q(X \wedge Y, Z \wedge W) \equiv R(X, Y, Z, W)$$

所给出的双线性型是合理地被定义的. 证明它是对称的,而且，如果Q在每一点为正定(或负定)，则M有正(或负)的截面曲率. (遗憾的是反过来的命题:"正(或负)的截面曲率可推出Q是正定(或负定)的"已被知道是错误

的.)

注意：关于这个双线性型的一个应用，可见概括性的论文（[W9] 中第 23 页的§3）。

习题 9. 设 S^n 是 R^{n+1} 中的 n 维单位球面，而且总认为在 S^n 上配备着诱导度量.

(1) 证明：对分别在 x，x' 处切于 S^n 的任意两个 2 维平面 Π, Π'，存在着一个等距 $\varphi: S^n \to S^n$，使得 $\varphi(x) = x'$，且

$$\mathrm{d}\varphi(\Pi) = \Pi';$$

(2) 证明：S^n具有常截面曲率.

我们将提及一些与曲率张量有关的众所周知的内容，从而使我们的图景更完美一些. 上述引理 1 的(2)给出了第一 Bianchi 恒等式. 存在着下列的第二 Bianchi 恒等式：

引理 3（**第二 Bianchi 恒等式**） 曲率张量 $R_{XY}Z$ 适合

$$(\mathrm{D}_X R)_{YZ} + (\mathrm{D}_Y R)_{ZX} + (\mathrm{D}_Z R)_{XY} = 0, \quad \forall \text{ 向量场 } X, Y, Z.$$

证明 只需对坐标邻域中的坐标向量场 X, Y, Z 证明引理就行了. 于是如在引理 1 中那样，对这些向量场 X, Y, Z, W 我们有

$$\begin{cases} \mathrm{D}_X Y = \mathrm{D}_Y X, \\ R_{XY} = -\mathrm{D}_X \mathrm{D}_Y + \mathrm{D}_Y \mathrm{D}_X. \end{cases} \tag{2.9}$$

又注意到

$$\begin{aligned} (\mathrm{D}_X R)_{YZ} W = \mathrm{D}_X (R_{YZ} W) - R_{YZ}(\mathrm{D}_X W) \\ - R_{\mathrm{D}_X Y, Z} W - R_{Y, \mathrm{D}_X Z} W. \end{aligned} \tag{2.10}$$

再在这个方程中循环地交换 X, Y, Z 后就可得到两个其它的方程，把它们相加在一起，并利用(2.9)，就能证得引理. 证毕.

习题 10. 设 R 为黎曼流形 M 的曲率张量，则 $\mathrm{D}R=0$ 的充要条件是：对每一条曲线 $\gamma:[0, 1] \to M$ 及任何一个 2-平面 $\Pi \subset M_{\gamma(0)}$，$\Pi$ 及 $P^\gamma(\Pi)$ 有相同的截面曲率（称这种黎曼流形为**局部对称的**，对这样的流形在 §4 中将有一个十分简单的讨论. 如果读者需要知道更多这方面的知识，可看 [CE]，第三章及 [KN, II]，第十一章).

对于函数 f，我们已经看到 D^2f 是一个对称张量．下列引理是这一事实的十分忠实的推广(可参看引理 1 中 R_{XY} 所具有的性质(4))．

引理 4 (Ricci **恒等式**) 如 T 是一个张量场，则

$$D^2T(\cdots, X, Y) - D^2T(\cdots, Y, X) = (R_{XY}T)(\cdots).$$

证明 由引理 1 的(2)及(3)得知

$$(D^2T)(\cdots, X, Y) = (D_Y(D_XT))(\cdots) - (D_{D_YX}T)(\cdots).$$

交换 X，Y，再相加后即可．证毕．

最后，我们导入由 R 所生成的、最常用的张量和函数．Ricci **张量**是一个二阶协变张量场 Ric，使得如 X，Y 为向量场，则在每点 $x\in M$ 处有

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i, X, e_i, Y),$$

这里 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 M_x 中的一组幺正基．利用 R 的多重线性性质可知，Ric 与幺正基的选取无关．由引理 1 的(4)知道，Ric 是对称的，即

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X).$$

进而，在 M 的切单位球面上用 $X\longmapsto \mathrm{Ric}(X, X)$ 可定义一个函数，称 $\mathrm{Ric}(X, X)$ 为在向量 X 下的 Ricci **曲率**．固定 $x\in M$，且设 $X\in M_x$，选 M_x 中的一组幺正基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 使得 $e_1 = X$，则由 Ric 的定义及 $R(e_1, e_1, e_1, e_1) = 0$ 得到

$$\mathrm{Ric}(X, X) = \sum_{i=2}^{n} R(e_i, e_1, e_i, e_1).$$

于是 Ricci 曲率乃是 $n-1$ 个截面曲率之和．**数量曲率** s 是 M 上的 C^∞ 函数，其定义为 Ric 的迹，所以在上述记号下，

$$s(x) = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_i, e_j).$$

因此数量曲率是由幺正基中 n 个向量所张成的各种可能的 2-平

面的截面曲率的总和。

过去十年中，我们对 Ricci 曲率及数量曲率的理解有了很大的推进。在本书的稍后部分，我们将对 Ricci 曲率作比较详尽的研究。但是由于我们会很少提及数量曲率，因此在这里有必要列出一些有关这个函数的最近的论文：[GL2]，[SY1]，[SY3]。

§3 指数映射，高斯引理和度量的完备性

本节参考文献

[S8, I]，第9章。

[GKM]，§4.4和§5.1。

[M1]，§10。

[KN, I]，第4章§3和§4（这里的叙述比别处稍麻烦些）.

在§1的末尾，我们给出了一般联络的测地线的定义．现在要仔细研究黎曼度量的测地线（即 Levi-Civita 联络的测地线）以及它们和黎曼流形的**距离结构**①的关系.

设M是黎曼流形，D是它的 Levi-Civita 联络．回忆一下，一条曲线 γ: $[0, 1]\to M$ 是D的测地线（简言之，是黎曼度量的测地线），其充要条件是 $D_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$．由此我们知道，如果$\gamma$是一条测地线，则$|\dot\gamma|$必是常数．也须看到，如果 $\gamma:[0, 1]\to M$ 是一条测地线，那么对任意正常数 c，

$$\gamma^c: \left[0, \frac{1}{c}\right]\to M: t\longmapsto\gamma(ct)$$

也是测地线．由于$|\dot\gamma^c|=c|\dot\gamma|$，所以在参数做适当线性改变之后，我们总可以假定一条测地线γ满足$|\dot\gamma|=1$．具有这种性质的测地线称**正规的**．下面将描述条件$|\dot\gamma|=1$ 的几何意义.

如果 $\xi:[a, b]\to M$ 是一条 C^∞ 曲线，定义ξ的**长度**为

$$L(\xi)=\int_a^b|\dot\xi(t)|dt.$$

① 距离结构按通常拓扑学术语是度量空间的结构．为了避免与黎曼度量一词在字面上混淆，故权且用此.

令 $s:[a,b]\to[0,L(\xi)]$ 是 C^∞ 函数，满足

$$s(t)=\int_a^t|\dot{\xi}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\equiv L(\xi|_{[a,t]}). \tag{3.1}$$

如果 ξ 是一个**浸入**(有时也称为是一条**正则曲线**)，那么

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\dot{\xi}(t)|>0,$$

从而函数 s 有 C^∞ 的反函数 $u:[0,L(\xi)]\to[a,b]$. 由 $\bar{\xi}(s)=\xi(u(s))$ 确定的曲线 $\bar{\xi}:[0,L(\xi)]\to M$ 称为是 ξ 的**再参数化**，并且它的参数 s 具有很好的性质:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\bar{\xi}}{\mathrm{d}s}\right|=1,\quad s=L(\bar{\xi}|_{[0,s]}).$$

其实 $\left|\frac{\mathrm{d}\bar{\xi}}{\mathrm{d}s}\right|=1$ 与 $s=L(\bar{\xi}|_{[0,s]})$ 是互相等价的. 这样的参数称为**弧长参数**，这样的 $\bar{\xi}$ 称为**弧长参数化**的. 于是我们知道**正规测地线**是弧长参数化的测地线.

关于"长度"及"弧长参数化"的上述讨论显然可稍作变动适用于分段 C^∞ 曲线的情形. 曲线 $\xi:[0,1]\to M$ 称为是**分段 C^∞ 的**，这是指: 它是连续的，并且存在有限数列

$$0=a_0<a_1<\cdots<a_{k+1}=1,$$

使得 $\xi|_{[a_i,a_{i+1}]}$ 是 C^∞ 的，其中 $i=0,\cdots,k$. (其实分段 C^1 就足以保证讨论了.)

眼下我们的目标是刻划黎曼流形中的测地线，说明它们在局部上是**长度最小**的. 为达目标，我们先引进黎曼度量的**指数映射**概念(其实有了联络也可以这么做)，并对它做一番讨论. 粗略说来，在 $x\in M$ 点处的指数映射 $\exp:M_x\to M$ 定义如下: 任给 $v\in M_x$，令 γ_v 是一条测地线，它从 x 出发，初始切向量是 v，取 γ_v 上一点 y 使得 x 至 y 的弧长恰为 $|v|$，那么就由等式 $\exp_x v=y$ 来定义 $\exp_x$. 直观想起来，在 M_x 中存在原点 O 的一个邻域 $\tilde{\mathscr{U}}_x$，$\exp_x:\tilde{\mathscr{U}}_x\to M$ 是可以定义的，并且 $\exp_x v$ 是 C^∞ 依赖于

x 和 v. 所有这些确实都是对的，但是要用这里关于 $\exp_x v$ 的几何式定义来证它们，则是件非常笨拙的事. 为此，我们首先把测地线和 $\exp_x v$ 想成从微分方程解出来的东西，而后利用微分方程的理论把这里欲证的事证出. 确定测地线的方程是 (1.13)，它是常微分方程组，利用常微分方程组的基本定理 (参阅 [KN, I] 的附录 1 或 [M1] 中第 56 页) 可知：对任意 $x \in M$，$\varepsilon > 0$，存在 x 的一个邻域 $\mathscr{U}$ 和 $\delta > 0$，使得对于任意的 $y \in \mathscr{U}$ 和 $v \in M_y$，只要 $|v| < \delta$，则必有唯一的一条测地线 γ_v 适合 $\dot{\gamma}_v(0) = v$，并且 γ_v 的定义域包含 $[0, \varepsilon]$ (即 $\gamma_v:[0, \varepsilon] \to M$ 是有定义的).

由于由 $\xi_v(t) \equiv \gamma_v(\varepsilon t)$ 确定的测地线具有性质：$\dot{\xi}_v(0) = \varepsilon v$，$\xi_v$ 在 $[0, 1]$ 上有定义，所以我们用 $\varepsilon\delta$ 代替上面的 δ，从而得到

(#) 任给 $x \in M$，存在 M 中 x 的邻域 $\mathscr{U}$ 和一个正数 $\omega > 0$，使得对任意 $y \in \mathscr{U}$，$v \in M_y$ 只要 $|v| < \omega$，则有唯一一条测地线 γ_v 满足：$\dot{\gamma}_v(0) = v$，γ_v 的定义域包含 $[0, 1]$.

沿用(#)中记号，设

$$B_x(\omega) \equiv \{X \in M_x : |X| < \omega\},$$

那么用 $\exp_x v = \gamma_v(1)$ 定义的 $\exp_x : B_x(\omega) \to M$ 就是前面以几何方式定义的 $\exp_x$. 此时由(#)保证 $\exp_x : B_x(\omega) \to M$ 是合理的. 令 U 是 M 的切丛 TM 中的开集，它定义为

$$U \equiv \{(y, v) : y \in \mathscr{U}, |v| < \omega\},$$

那么(#)指出：由 $\exp(y, v) = \exp_y v$ 确定映射 $\exp : U \to M$ 是可以的. 再由常微分方程组的解对参数 C^∞ 依赖的定理可知，exp 是 C^∞ 映射，特别 $\exp_x : B_x(\omega) \to M$ 是 C^∞ 的. 如果 $\mathscr{B} \subset M_x$ 是 $\exp_x$ 的最大定义域，同样的推理也能保证 $\exp_x : \mathscr{B} \to M$ 是 C^∞. 一般说来 $\mathscr{B}$ 只是 M_x 的一个真子集，下面的例子就表明此事. 另一方面在本节末我们将看到 $\exp_x$ 可定义在 M_x 上相当

于要求M是**完备的黎曼流形**.

例 设M是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的**单位圆盘**$\{x^2+y^2<1\}$,$\boldsymbol{R}^2$的平坦度量诱导M上黎曼度量. 令$\mathscr{D}$是M在原点O处切空间 M_O 中的单位圆盘,那么从 M_O 到M的 $\exp_O$ 的最大定义区域就是 $\mathscr{D}$. 这是因为,当将M_O与 $\boldsymbol{R}^2$ 按通常办法等同之后,可见对任意 $v\in M_O$, $\gamma_v(t)=tv$, 故由 $\gamma_v(1)\in M$ 可导出$|v|<1$.

注记. 就我们所知,"**指数**"一词最早出现在 [A 1] 中. 这种命名法的道理在于: 如果M是行列式为$+1$ 的$n\times n$阶正交矩阵构成的流形,令 M_I 是M在单位阵I处的切空间,众所周知 M_I 恰是所有反称矩阵生成的向量空间. 如果在 M 上给定由 M_I 的 Killing **型**导出的**双不变度量**,那么前面定义的 $\exp_I:M_I\to M$ 实际上由下式给出

$$\exp_I A=e^A\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!},\quad \forall A\in M_I.$$

(这只是李群理论中一些平凡事实的综合,但是很抱歉, 我们找不到一本这方面的文献,能够扼要地说明这个事实.)

把测地线的具体例子和指数映射留到§4讨论,现在我们着手一般的理论. 首先注意到, 在 $O\in M_x$ 的一个充分小的邻域内, $\exp_x$ 是一个微分同胚. 为说明此事, 先想一想 M_x 是一个有限维向量空间,故 M_x 的所有切空间皆自然地等同于 M_x本身. 于是我们有 $(\mathrm{d}\exp)_O:M_x\to M_x$. 我们断言: $(\mathrm{d}\exp)_O$ 实际上是**恒同映射**. 看清此事有一个最不含混的办法是这样的. 回想一下当 $f:M\to N$ 是一个 C^∞ 映射, $f(x)=y$ 时, 计算 $\mathrm{d}f:M_x\to N_y$ 的一个办法是利用曲线,即对任给 $v\in M_x$,取一条曲线γ使得 $\dot\gamma(0)=v$,令 $\xi=f(\gamma)$, 则 $\mathrm{d}f(v)=\dot\xi(0)$. 在我们关心的情形,

$$\exp_x:B_x(\omega)\to M,\quad \exp_x(0)=x,$$

故对给定 $v\in(M_x)_O=M_x$, 取 $\gamma(t)=tv$, 便有 $\dot\gamma(0)=v$. 按 $\exp_x$ 的定义,$\exp_x(\gamma)$ 是(#)中的 γ_v,所以

$$(\mathrm{d}\exp_x)_O(v) = \dot{\gamma}_v(0) = v,$$

这正如断言所叙. 这样一来, $(\mathrm{d}\exp_x)_O$ 是非奇异的, 故对充分小的 δ, 它将 $B_x(\delta)$ 微分同胚地映入M内. 下列引理是这个事实的大范围叙述.

引理 1 对给定的一个紧致集合 $K\subset M$,存在 $\varepsilon>0$, 使得对任意的 $x\in K$, $\exp_x$ 是 $B_x(\varepsilon)$ 到M内的微分同胚.

证明 用通常标准的**紧致性论证法**, 只须证明: 对任意 $x\in M$,存在 $\varepsilon>0$ 和 x 的一个邻域 Ω, 使得对任意 $y\in\Omega$, $\exp_y$ 是 $B_y(\varepsilon)$ 到M内的微分同胚. 由紧接着(#)的那段说明可知, 存在切丛 $\mathbf{T}M$ 的零截面(即 $\{(x',0)\in \mathbf{T}M: x'\in M\}$) 的邻域 N, 使得对任意 $x'\in M$, $N\cap M_{x'}$ 属于 $\exp_{x'}$ 的定义域. 由

$$E(y,v)=(y,\exp_y v)$$

定义一个映射 $E:N\to M\times M$, 由于(#)后的讨论, E 是 C^∞ 的. 现在来考察 $\mathrm{d}E$. 为此选取以 x 为中心的坐标函数 (即 $x^i(x)=0,\ \forall i$), 对应的坐标邻域是 $\mathscr{U}$, 我们在 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ 中建立坐标函数如下,其中 $\pi:\mathbf{T}M\to M$ 是自然投射. 对任意$(y,v)\in\pi^{-1}(\mathscr{U})$, 令

$$u^i(y,v)=\mathrm{d}x^i(v),\quad \forall i,$$

就得到 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ 中一组函数 $u^1,\cdots,u^n$. 由 $\mathbf{T}M$ 的 C^∞ 结构的定义,可知 $\{x^1,\cdots,x^n,u^1,\cdots,u^n\}$ 是 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ 中坐标函数. 从 E 的定义及引理 1 之前的讨论可知:

$$\mathrm{d}E\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(x,0)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(x),\ \frac{\partial}{\partial x^i}(x)\right),$$

$$\mathrm{d}E\left(\frac{\partial}{\partial u^i}(x,0)\right)=\left(0,\ \frac{\partial}{\partial x^i}(x)\right),\quad \forall i.$$

特别地, $\mathrm{d}E:N_{(x,0)}\to M_x\times M_x$ 是同构. 利用反函数定理, 存在 $\mathbf{T}M$ 中点 $(x,0)$的邻域$\mathscr{W}$,它在 E 下微分同胚地映入$M\times M$中点 (x,x) 的一个邻域. 于是存在两个正数 c 与 ε', 使得集合

$$\{(y, v) \in \mathrm{T}M : |x^i(y)| \leqslant c, \quad |u^i(v)| \leqslant \varepsilon'\}$$

是 $\mathscr{W}$ 中紧致子集. 由于**范数函数** $v \longmapsto |v|$ 是连续函数,故可取 ε 充分小,使得

$$\{(y, v) \in \mathrm{T}M : |x^i(y)| \leqslant c, \quad |v| \leqslant \varepsilon\} \subset \mathscr{W}.$$

取这样的 ε 和 $\Omega = \{y : |x^i(y)| \leqslant c\}$, 即合引理 1 的要求.

现在我们讨论黎曼流形上测地线的局部长度最小性质, 在下面讨论中总是固定 x, 因而可将 $\exp_x$ 写成exp而不致引起混淆. 取 δ 足够小使得 exp 在 $B(\delta) \equiv \{X \in M_x : |X| < \delta\}$ 上是微分同胚. 令 $B_\delta \equiv \exp B(\delta)$. 对于每个 $v \in B(\delta)$,由 $c(t) = tv$ 确定的曲线 $c: [0, 1] \to B(\delta)$ 称为 $B(\delta)$ 中**径向线段**, 它们在 exp 下的像称为 B_δ 中**径向测地线**(段). 由此我们将叙述下面的定理.

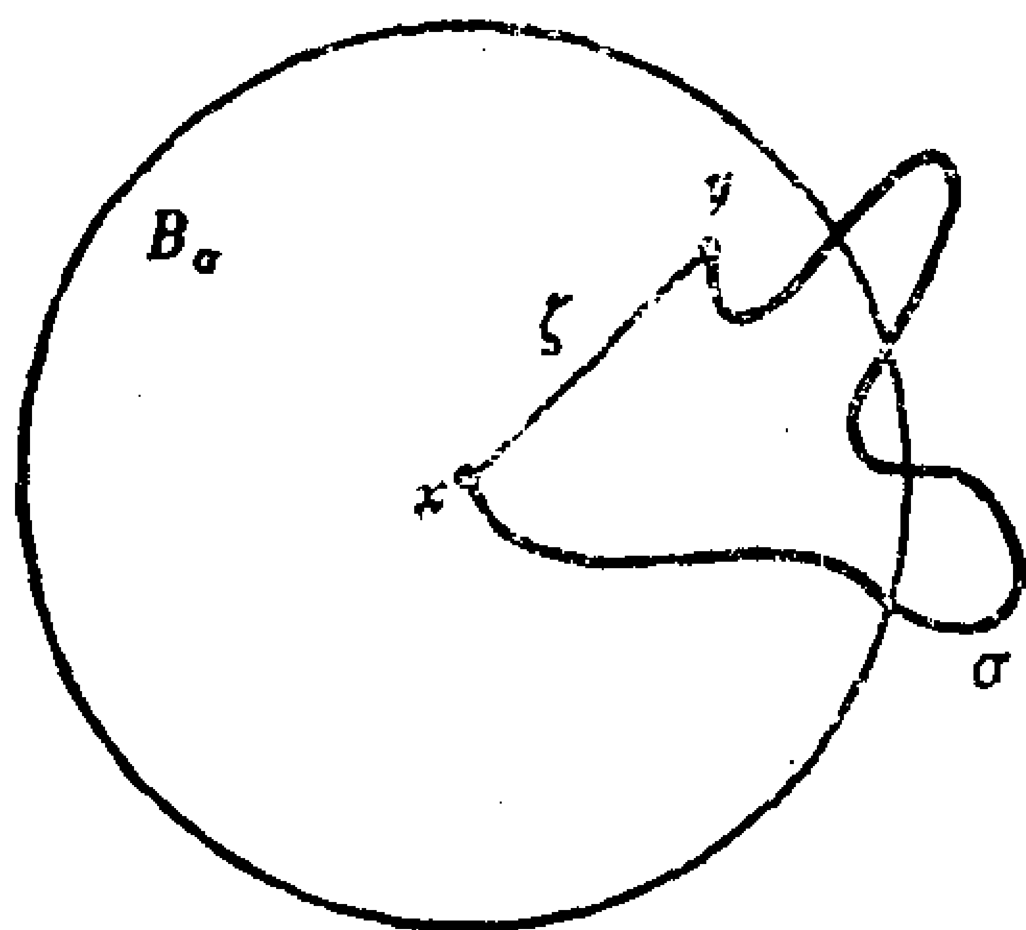


图 3.1

定理 2 设 σ 是流形中连接 x 至 y 的一个分段 C^∞ 曲线,其中 $y \in B_\delta$, 又设 ζ 是 B_δ 中连接 x 至 y 的唯一的那条测地线 (径向测地线),如图 3.1 所示. 则 $L(\sigma) \geqslant L(\zeta)$, 并且等号成立当且仅当 σ 是 ζ 的**单调再参数化**.

当 $M = \boldsymbol{R}^n$ 时, 定理 2 就是这样的断言: 两点间最短的道路是一条直线. 人们最初定会感到, 这个断言是多么平凡而定理 2 却有点不那么简单. 可是从下面的论证你就会明白, 求助**高斯引理**(下面的引理 5),这个"平凡"的断言本质上等价于定理 2. 首先我们考察如何证这个"平凡"的断言的, 从证明的过程中挑出关键,而后推广这些关键处,以得到定理 2 的证明.

现在我们就来**证明** $M = \boldsymbol{R}^n$ 时的定理 2. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中取定 $x = 0$. 设

$$\sigma:[0,1]\to \boldsymbol{R}^n,\quad \sigma(0)=0,\quad \sigma(1)=y.$$

无妨假定 σ 是 C^∞ 的，不然的话，可以将论证限制在每一个 C^∞ 小段上去．证明分下列三步：

第一步．在 $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ 上有一个自然的径向向量场 $\mathscr{R}$，它定义为

$$\mathscr{R}(z)=\frac{z}{|z|},\quad \forall z\in \boldsymbol{R}^n-\{0\}.$$

（要记住 $\boldsymbol{R}^n$ 的切空间与 $\boldsymbol{R}^n$ 自然等同，故这里的 $\frac{z}{|z|}\in(\boldsymbol{R}^n)_z$.）

利用这个 $\mathscr{R}$ 来描写 $\dot\sigma$ 与 $\dot\zeta$. $\dot\sigma(t)$ 有唯一分解

$$\dot\sigma(t)=f(t)\mathscr{R}(\sigma(t))+T(t),\quad \forall t\in[0,1],$$

其中 $T(t)$ 切于 $\boldsymbol{R}^n$ 中过 $\sigma(t)$ 的球面

$$S_{\sigma(t)}=\{z\in \boldsymbol{R}^n:|z|=|\sigma(t)|\}.$$

$T(t)$ 称为 $\dot\sigma(t)$ 的球面分量．定理 2 中的 ζ 此时是

$$\zeta:[0,1]\to \boldsymbol{R}^n:t\longmapsto ty,$$

于是

$$\dot\zeta(t)=|y|\cdot\mathscr{R}(\zeta(t)),\quad \forall t\in[0,1].$$

我们构造一条曲线

$$\xi:[0,1]\to \boldsymbol{R}^n:t\longmapsto\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\frac{y}{|y|}.$$

易见

$$\dot\xi(t)=f(t)\mathscr{R}(\xi(t)).$$

此外我们断言：$\xi(1)=y$，即

$$\int_0^1 f(\tau)\mathrm{d}\tau=|y|.$$

这是由于

$$\left\langle\sigma(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{R}(\sigma(t))\right\rangle=\left\langle|\sigma(t)|\mathscr{R}(\sigma(t)),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{R}(\sigma(t))\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}|\sigma(t)| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathscr{R}(\sigma(t)), \mathscr{R}(\sigma(t))\rangle$$

$$= \frac{1}{2}|\sigma(t)| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} 1 = 0,$$

所以

$$f(t) = \langle \dot{\sigma}(t), \mathscr{R}(\sigma(t))\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \sigma(t), \mathscr{R}(\sigma(t))\rangle$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\sigma(t)|).$$

为简单计，我们有时将 $\int_0^1 f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 中的 $\mathrm{d}\tau$ 省去，这时便有

$$\int_0^1 f = |\sigma(1)| = |y|.$$

第二步.

$$L(\sigma) = \int_0^1 |\dot{\sigma}| = \int_0^1 \sqrt{f^2\langle \mathscr{R}, \mathscr{R}\rangle + 2f\langle \mathscr{R}, T\rangle + |T|^2}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{f^2 + |T|^2},$$

$$L(\xi) = \int_0^1 |\dot{\xi}| = \int_0^1 |f|, \quad L(\zeta) = \int_0^1 |\dot{\zeta}| = |y|.$$

第三步.

因

$$\int_0^1 \sqrt{f^2 + |T|^2} \geqslant \int_0^1 |f| \geqslant \int_0^1 f = |y|,$$

由第二步立即得

$$L(\sigma) \geqslant L(\zeta).$$

这便证明了定理的第一部分. 若 $L(\sigma) = L(\zeta)$,则由第三步可知

$$\int_0^1 \sqrt{f^2 + |T|^2} = \int_0^1 |f| = \int_0^1 f = |y|,$$

这表明: $T(t) = 0$, $f(t) \geqslant 0$, 从而 $\sigma(t) = \xi(t)$ 并且 $\xi(t)$ 是

$\zeta(t)$ 的单调再参数化。这便完成了证明。

为了对一般的M证明定理 2，我们须仔细分析上面的证明，看看能否推广到M的情形。上面证明中的第三步无疑可以推广，甚至不必做半点修改。至于第一步，须在 x 点附近建立一个欧氏空间结构，并以 x 为原点，以保证 $\mathscr{R}$ 的存在和计算，另外还要求在这个欧氏空间中

$$\zeta:[0,1]\to \boldsymbol{R}^n: t\longmapsto ty$$

恰是定理 2 中所指出的径向测地线。最后关于第二步，有两件事得到保证则结论就成立了。一件是 $\langle \mathscr{R}, \mathscr{R}\rangle = 1$，第二件是 $\mathscr{R}$ 与 S_x 垂直。在此我们要强调一点：出现在第一步中的内积$\langle\ ,\ \rangle$是 $\boldsymbol{R}^n$ 的平坦度量，而出现在第二步中的$\langle\ ,\ \rangle$则是所考虑M的黎曼度量。经过上面的分析，显然就有下列的引理。

引理 3 设 $B(\delta)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，在 $B(\delta)$ 中给定一个黎曼度量满足：$G(\mathscr{R}, \mathscr{R}) = 1$，并且相对于 G，$\mathscr{R}$ 垂直于每一个球面 S_x，其中 $\mathscr{R}$，S_x 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义（请参见前面第一步中所说的）。那么如果 $\tilde{\sigma}$ 是 $B(\delta)$ 中连接原点O至 $\tilde{y}$ 的一条分段 C^∞ 曲线，$\tilde{\zeta}:[0,1]\to B(\delta)$ 是由 $\tilde{\zeta}(t) = ty$ 定义的曲线，则

$$L_G(\tilde{\sigma}) \geqslant L_G(\tilde{\zeta}),$$

此外等号成立当且仅当 $\tilde{\sigma}$ 是 $\tilde{\zeta}$ 的单调再参数化。

现在我们来说说如何**证明定理 2**。由于

$$\exp_x: B(\delta) \to B_\delta$$

是微分同胚，因此欲证定理 2，只须在 $B(\delta)$ 讨论就够了。$B(\delta)$ 的黎曼度量应取为 $(\exp_x)^* g$，其中 g 是 B_δ 中的黎曼度量(即M的黎曼度量在 B_δ 中的限制)。令 $G = (\exp)^* g$，只要验证这里的G满足引理 3 的要求，那么引理 3 的结论便成立，定理 2 也就证出了。引理 3 中要求G具有性质：

$$G(\mathscr{R}, \mathscr{R}) = 1, \qquad G(\mathscr{R}, S_y) = 0,$$

这恰是下面的引理 4 和引理 5。

在 $M_x-\{0\}$ 中定义向量场 $\mathscr{R}$ 如下：对 $v\in M_x-\{0\}$，

$$\mathscr{R}(v)=\frac{1}{|v|}v,$$

其中$|v|$是v在内积空间M_x中的模长.

引理 4 $|\mathrm{d}\exp(\mathscr{R})|=1$.

证明 设 $v\in M_x-\{0\}$，令γ是M中正规测地线，使得

$$\dot{\gamma}(0)=\frac{1}{|v|}v,$$

那么由exp的定义可知，$\exp v=\gamma(|v|)$，从而

$$\mathrm{d}\exp(\mathscr{R}(v))=\dot{\gamma}(|v|).$$

引理 4 得证.

引理 5(高斯引理) 对每一 $t<\delta$，令 S_t 是 B_δ 中半径为 t 的**测地球面**(即 S_t 是 M_x 中半径为 t 的球面的exp像)，则径向测地线正交于每一个 S_t (图 3.2). 换句话说，对任意 t，径向测地线的切向量(即 $\mathrm{d}\exp(\mathscr{R})$) 垂直于 S_t 的切空间.

证明 考察微分同胚

$$F:S^{n-1}\times(0,\delta)\to B_\delta-\{x\},$$

其中 S^{n-1} 是 M_x 中的单位球面，$F(p,t)=\exp(tp)$. 易见对每一固定的 t，F 将 $S^{n-1}\times\{t\}$ 微分同胚地映为 S_t. 取 $\{y^1,\cdots,y^{n-1}\}$ 为 S^{n-1} 的局部坐标系，r 是 $(0,\delta)$ 的自然参数，令

$$R=\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

$$Y_i=\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right),$$

$i=1,\cdots,n-1$.

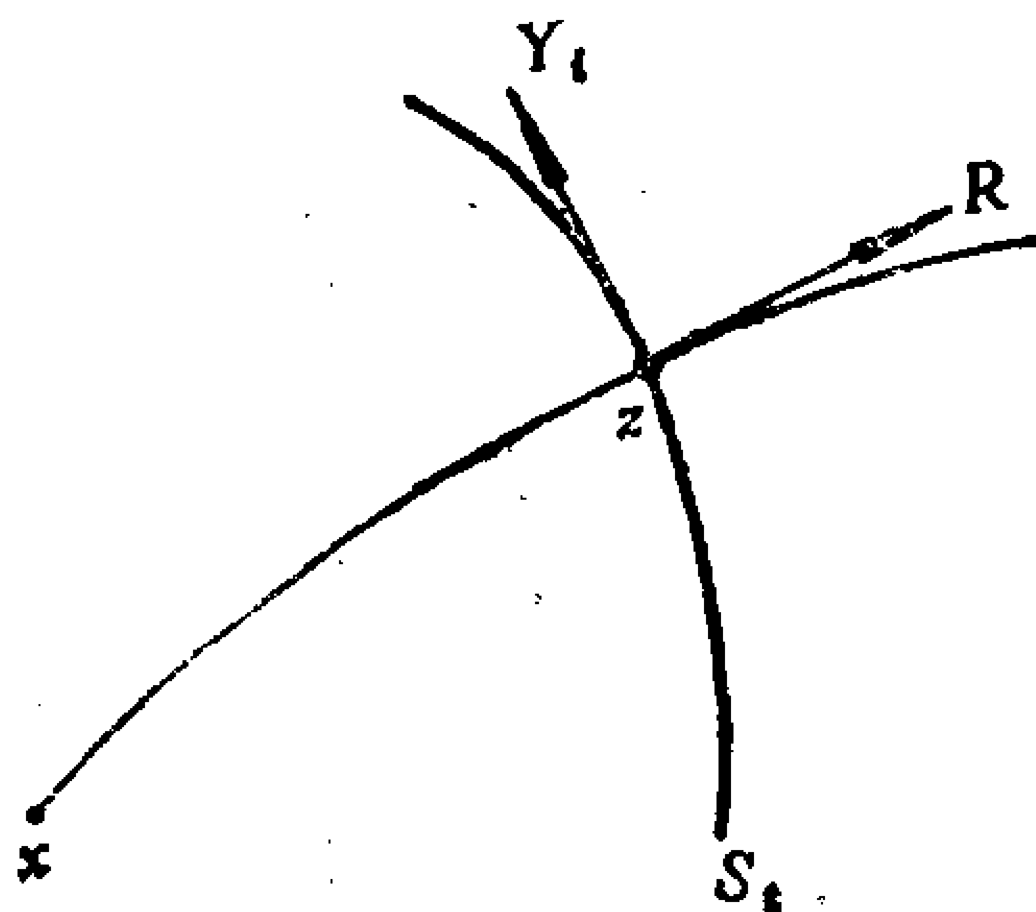


图 3.2

那么本引理就相当于断言：

$$\langle Y_i, R\rangle = 0, \quad \forall i.$$

考察图 3.2，由于

$$\begin{aligned} R\langle Y_i, R\rangle &= \langle D_R Y_i, R\rangle + \langle Y_i, D_R R\rangle \\ &= \langle D_R Y_i, R\rangle = \langle D_{Y_i} R, R\rangle \\ &= \frac{1}{2} Y_i\langle R, R\rangle = 0 \end{aligned}$$

(上面第二个等号是因为 R 是径向测地线的切向量，第三个等号是因为§1 中的 (1.2) 以及

$$[R, Y_i] = \mathrm{d}\, F\left(\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right]\right) = 0,$$

最后一个等号是因为 $\langle R, R\rangle = 1$)，所以 $\langle Y_i, R\rangle$ 沿着任意一条径向测地线为常数 k. 可是当 $z \to x$ 时，$Y_i(z) \to 0$，从而

$$k = \lim_{z\to 0}\langle Y_i, R\rangle(z) = 0.$$

证毕.

由前面的讨论可知，证出引理 4 和引理 5 之后，定理 2 也就证明了. 定理 2 引出下列三个自然的问题:

问题 A 如果具有弧长参数的曲线整体上看是长度最小的 (即 $\gamma:[0,c] \to M, |\dot\gamma| = 1$ 并且对任意一条连接 $\gamma(0)$ 至 $\gamma(1)$ 的曲线 ζ，总有 $L(\gamma) \leqslant L(\zeta)$)，那么 γ 必是测地线吗?

问题 B 一条测地线 $\gamma:[0, 1] \to M$ 必定是一条连接 $\gamma(0)$ 至 $\gamma(1)$ 的最小长度的曲线吗?

问题 C 给定 $x, y \in M$，是否存在一条连接 x 至 y 的曲线，它具有最小长度?

问题 A 的回答是肯定的，可从定理 2 看出. 这样的 γ 必是正规测地线. 实际上可以这样具体来看. 令 $x = \gamma(0)$，B_δ 如定理 2 所述，$t_1 = \min\{t: \gamma(t) \in \partial B_\delta\}$，这里 ∂B_δ 是 B_δ 的边界. 假若 $\gamma|_{[0,t_1]}$ 不是测地线，则令 γ_1 是连接 x 至 $y = \gamma(t_1)$ 的径向测

地线，于是

$$L(\gamma_1) < L(\gamma|_{[0,t_1]}),$$

从而连 x 至 y 的 γ_1 接上 $\gamma|_{[t_1,c]}$，所得的曲线严格短于 γ，这就得到矛盾. 以这种方式，我们核实 γ 的每一子线段皆是测地线. 由于"是测地线"一事是局部条件(见(1.13))，故我们得到结论.

问题B的回答是否定的. 设M是 $\boldsymbol{R}^3$ 中单位球面，由初等几何可知：M上正规测地线恰是具弧长参数的大圆中的弧（**大圆**者就是球面本身与过球心的平面之交线），事实上还有无须计算的证明，将在§4中给出. 不管怎样，我们令 p 是北极 $(0, 0, 1)\in M$，选定一条过 p 的大圆 C（自然也过南极 $(0, 0, -1)$），取一点 $q\in C$，使得 $q\neq(0, 0, -1)$（图3.3），那么 p, q 分 C 为两段. 令 γ 是长的一段，ζ 是短的那段，这时 γ 与 ζ 皆是连接 p 至 q 的测地线，而 $L(\gamma) > L(\zeta)$.

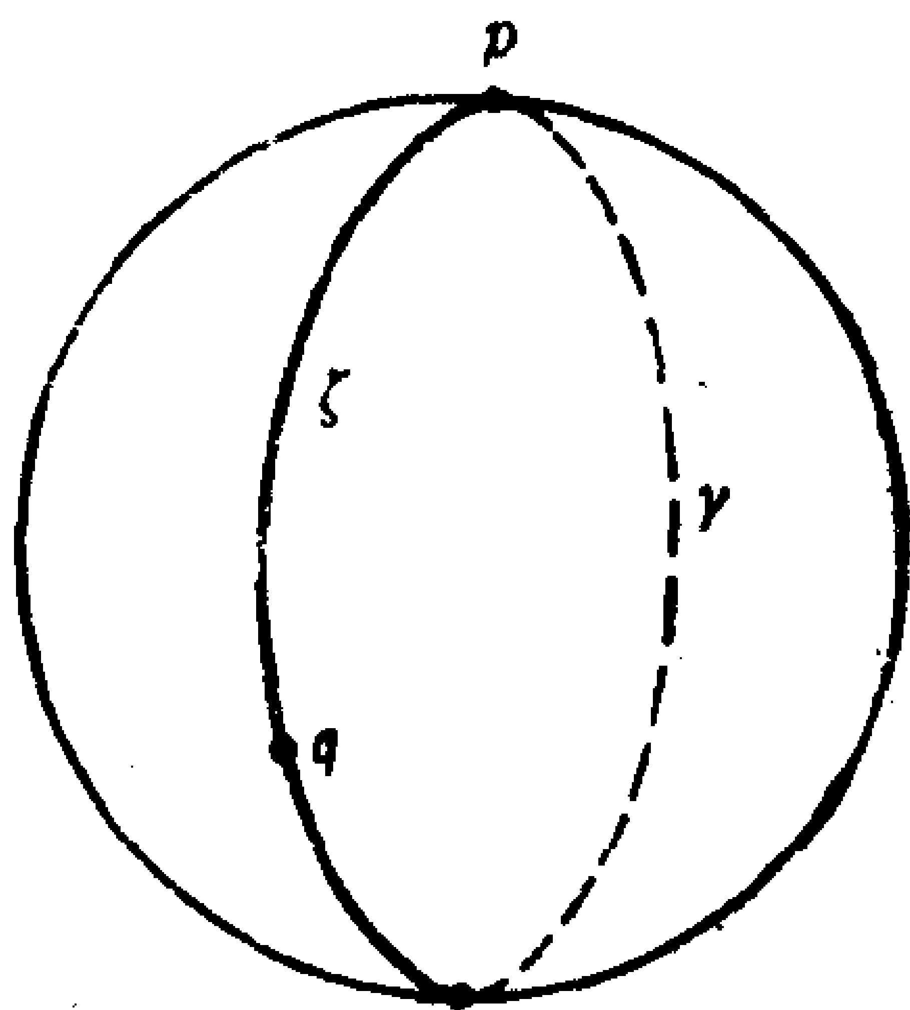


图 3.3

一条测地线 $\gamma:[0,1]\to M$ 称为是**最短测地线**，如果在所有连接 $\gamma(0)$ 至 $\gamma(1)$ 的曲线中它的长度最小. （类似的，可定义**最短曲线**概念.）上面的例子表明测地线不一定是最短的. 其实这样的例子多得很，下面再给一个例子.

习题 1. 在无限长圆柱面

$$N = \{(x, y, z): x^2 + z^2 = 1, -\infty < y < \infty\}$$

上，令 $p=(0, 0, 1)$，试证对任意 $q=(x, y, z)\in N$，$z\neq -1$，存在一条连接 p 至 q 的测地线，它不是最短的.

最后，问题C的回答也是否定的. 由问题A的讨论可知，如果一条连接 x 至 y 的曲线在所有同类型的曲线中具有最小长度，则它必是最短曲线，当选取弧长参数后，由问题A知它是最短测地

线．而我们又知道连接 x 至 y 的最短测地线可能是没有的，例如在我们讨论问题B时给出的例子中，当将弧 ζ 上去掉一点 Q，那么在这个刺破的球面上就没有最短测地线连接 p 至 q 了．

问题B与C的否定答案是特别有教益的．在问题B的情形，引导我们去问：这样现象为什么会发生？在什么情况下保证它不发生？粗略的回答分别是："沿着 γ 有过量的曲率"，"确保在 γ 上没有 $\gamma(0)$ 的割点"．在以后的章节中我们将详细处理这些问题．至于问题C，彻底的解释是容易多了．这关系到黎曼流形的"完备性"，这个完备性是本节最后的话题．

前面我们从黎曼度量引出"长度"概念，并用"长度"概念来讨论测地线．现在我们借助"长度"引出流形上的**距离结构**，接着自然地用距离结构讨论测地线．

我们在黎曼流形 M 上引进**距离空间结构**（通常也叫**度量空间结构**）如下：

用等式 $d(x, y)=\inf\limits_{\gamma} L(\gamma)$ 定义函数 $d: M\times M\to[0,\infty)$，其中 $x, y\in M$，inf 是取在所有连接 x 至 y 的分段 C^∞ 曲线集上．我们断言：d 是 M 上的距离（依点集拓扑的意义）．也就是说，我们必须证明：对任意 x, y，

(1) $d(x, y)\geqslant 0$，并且等号成立当且仅当 $x=y$；

(2) $d(x, y)=d(y, x)$；

(3) $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$，$\forall z\in M$．

除去"$d(x,y)=0$ 隐含 $x=y$"之外，其余上述各论断皆是显而易见的．因此只来证明：如果 $x\neq y$，则 $d(x, y)>0$．采用前面定理2的记号，如果 $y\in B_\delta$，那么定理2指出 $d(x, y)$ 就是连接 x 至 y 的径向测地线的长度，它是大于零的．如果 $y\bar{\in} B_\delta$，那么用初等的论证表明 $d(x, y)\geqslant\delta>0$．尽管已经这样证了，可我们不打算给读者一个印象，证明如此初等的事实的要用定理2．杀鸡焉用牛刀，因此现给出另外的证明（参阅[ST]中第43至44

页)，这个证明只用到黎曼度量的定义．设 $x \neq y$，选以 x 为中心的坐标系 $x^1, \cdots, x^n (x^i(x) = 0, \forall i)$，我们可以假定

$$y \bar{\in} \mathscr{U} \equiv \{(x^1, \cdots, x^n) : \Sigma (x^i)^2 \leqslant \delta^2\},$$

其中 δ 是一个小的正数．我们也可假定 $\mathscr{U}$ 是紧致的．在 $\mathscr{U}$ 中照常令

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

那么对 $\mathscr{U}$ 中任一曲线 $\gamma:[0, 1] \to \mathscr{U}$ 有

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)}\mathrm{d}t,$$

其中

$$\gamma^i = x^i \circ \gamma, \quad \dot{\gamma}^i = \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}, \quad \forall i.$$

从下面的习题 2 可知：存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 γ 及 t，

$$\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)} \geqslant \varepsilon \sqrt{\sum_i (\dot{\gamma}^i(t))^2},$$

所以

$$L(\gamma) \geqslant \varepsilon \int_0^1 \sqrt{\sum_i (\dot{\gamma}^i(t))^2}\mathrm{d}t \equiv \varepsilon L_0(\gamma),$$

其中 $L_0(\gamma)$ 是 γ 关于 $\mathscr{U}$ 中由坐标函数 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 导出的平坦度量下的长度．特别如果 γ 是连接 x 至 $\partial\mathscr{U}$ 上某一点，那么

$$L(\gamma) \geqslant \varepsilon\delta.$$

在这里我们已经用了引理 3 的最简单情形，G 恰是平坦度量的情形．由前面的假定 $y \bar{\in} \mathscr{U}$ 可知：每条连接 x 至 y 的曲线必与 $\partial\mathscr{U}$ 相交，于是

$$\mathrm{d}(x, y) \geqslant \varepsilon\delta > 0.$$

总结上面的讨论，我们证明了：d 是 M 上的距离．

习题 2. 设 K 是 R^n 的子集，$\{g_{ij}(x)\}$ 是 K 上 n^2 个连续函数 $(1 \leqslant i,$

$j\leqslant n$),使得对任意 $x\in K$,矩阵 $[g_{ij}(x)]$ 是对称的.

(1) 如果 $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ 分别是 $[g_{ij}(x)]$ 的最小,最大特征值,试证 λ 与 Λ 皆是 K 上连续函数.

(2) 假定 K 是紧致的,并且对每个 $x\in K$, $[g_{ij}(x)]$ 是正定的,试证: 存在正常数 ε_1 与 ε_2, 对于任意 $x\in K$ 和 任意 $(v^1,\cdots,v^n)=v\in R^n$ 有

$$\varepsilon_1|v|^2\leqslant\sum_{i,j}g_{ij}(x)v^iv^j\leqslant\varepsilon_2|v|^2.$$

由于 d 是一个距离,故我们有距离空间 (M,d). 我们必须验证 (M,d) 的拓扑与 M 上原先流形的拓扑是相同的. 写在习题 2 前面的讨论其实表明,每一个原先拓扑的开集也是 (M,d) 拓扑的开集. 类似地,利用习题 2 中(2)的另一个不等式可证明反过来也对,即 (M,d) 中的开集也是原先拓扑的开集.

一个黎曼流形 M 称为是**完备的**,如果 (M,d) 是一个完备的距离空间. 人们关于分析中的距离空间的经验使我们期望: 完备的黎曼流形在微分几何中将起决定性的作用. 事实确是如此,关于不完备的黎曼流形很少有好的定理(以后在§9 中讨论的 Morse **指数定理**是想到的少数几个定理之一). 在进一步讨论之前,必须证一个关于完备黎曼流形的基本结果,这就是 Hopf-Rinow **定理**(1931). 下面写的证明基本上是 de Rham 的(参阅 [R1]).

定理 6 (Hopf-Rinow) 在一个黎曼流形中,下列诸条件是等价的:

(1) M 是完备的;

(2) 对任意 $x\in M$, $\exp_x$ 定义在整个 M_x 上;

(3) 存在 $x\in M$,使得 $\exp_x$ 定义在整个 M_x 上;

(4) M 中每个有界闭子集是紧致的.

我们将证明 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1). 除去(3) ⇒ (4)外,上述每一个蕴含关系或是平凡的或是直接的. 在证明(3) ⇒ (4)的过程中,我们将集中精力证明"(3) ⇒ 推论7".

推论 7 在一个完备的黎曼流形中, 任意两点皆可用一条最

短测地线连接。

从推论 7 很容易得到:

推论 8 在一个完备的黎曼流形 M 中，$\exp_x: M_x \to M$ 是满的，$\forall x \in M$。

在证明定理 6 之前，首先让我们确保自己对定理的陈述有一个较好的理解．黎曼流形的完备性是距离拓扑的一个性质．因为 d 的定义不牵涉测地线，所以M 的完备性先验地与黎曼度量无关．另一方面条件(3)是说：每条测地线 $\gamma:[a,b] \to M$ 都可延伸到定义在整个 $\boldsymbol{R}$ 上的测地线．先验地说来，这是关于 Levi-Civita 联络的一个性质，似乎一点也不涉及距离拓扑．Hopf-Rinow 定理的要点自然在于宣称：上面两个似乎无关的说法其实是一样的．下面给出两个例子以透彻了解定理 6 中的某些陈述．(1)$\Leftrightarrow$(4)这一事实说明：完备的黎曼流形比完备的距离空间特殊得多．取一个可数集合

$$\mathscr{S} = \{a_i : i = 1, 2, \cdots\},$$

给它以离散度量，即定义 $d: \mathscr{S} \times \mathscr{S} \to [0, \infty)$ 使得

$$d(a_i, a_j) = \delta_{ij} \quad .$$

这就使 $\mathscr{S}$ 成为一个完备的距离空间，但是它不满足(4)，因为整个 $\mathscr{S}$ 是有界的，但非紧．换种说法，(1)$\Leftrightarrow$(4)表明：完备的黎曼流形大约是使经典的 Heine-Borel 定理成立的完备距离空间．第二个例子想说明满足推论 7 所述性质的黎曼流形不一定是完备的，这例子取M 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中单位开圆盘，其上给诱导度量，显然它不是完备的但满足推论 7.

定理 6 的证明及讨论 该定理的详细证明到处可见，例如[M1] 中第 62 至 64 页，[S8, I] 中第 9-55 至 9-58 页．欲证(1)$\Rightarrow$(2)，只须证明每条正规测地线 $\gamma:[a, b] \to M$ 能从两端无限延伸．如果最大的延伸是 (a_1, b_1)，假若说 $b_1 < \infty$，那么M 的完备性确保存在一个点 $x \in M$，使得当 $t \nearrow b_1$ 时 $\gamma(t) \to x$．令K是 x 的

一个紧致邻域，由引理 1 便找到 $\varepsilon > 0$，此时如果

$$d(\gamma(t_0), x) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

那么便可定义测地线 $\zeta:[0, \varepsilon] \to M$，使得

$$\zeta(0) = \gamma(t_0), \ \dot{\zeta}(0) = \dot{\gamma}(t_0).$$

这个 ζ 就延伸了 γ 并越过 x，从而导出矛盾.

(2) ⇒ (3)与(4) ⇒ (1)是平凡的，不必多说了.

主要的困难在于证(3) ⇒ (4). 因为我们已经有一个 C^∞ 映射 $\exp_x: M_x \to M$，故对 $r > 0$，可令 $\bar{B}_r \equiv \exp_x \overline{B(r)}$，其中 $\overline{B(r)}$ 是 M_x 中以 r 为半径的闭球. 由于 $\overline{B(r)}$ 是紧致的，所以 $\bar{B}_r$ 也是紧致的. 直观想来，当 $r \nearrow \infty$ 时，$\bar{B}_r$ 可盖住M中任何一点，所以如果K是有界的，那么有足够大的 r 使得 $K \subset \bar{B}_r$，再用K是闭的，可从 $\bar{B}_r$ 的紧致性导出K是紧致的，证明不就完结了吗？这个论证是正确的吗？既可说对也可说不对，因为宣称 $K \subset \bar{B}_r$ 太欠考虑. 我们看看前面提过的具有离散距离的空间 $\mathscr{S}$，它是一个完备空间，并有一串紧致子集

$$\bar{\beta}_n = \{a_1, \cdots, a_n\},$$

显见

$$\bar{\beta}_n \subset \bar{\beta}_{n+1}, \ M \equiv \mathscr{S} = \bigcup_n \bar{\beta}_n.$$

若令 $K = \mathscr{S}$，它是一个有界闭集，但是对所有的 n，$K \subset \bar{\beta}_n$ 不能成立. 于是要能贯彻前面的论证，需要仔细证明 $K \subset \bar{B}_r$. 一个办法是假定我们有：

(5) M中每一个点都可以用一条最短测地线与 x 连接起来.

如果有(5)，那就很好了：对给定的有界集 K，一定存在 A，使得

$$d(x, k) \leqslant A, \quad \forall k \in K.$$

此时(5)就保证 $K \subset \bar{B}_A$. 所以问题归结为证明 (3) ⇒ (5)(一旦

证出(3) ⇒ (5)，我们也就从(3)证出推论 7)． 证明的办法是用**“连续归纳法”**，叙述如下：令

$$\bar{\mathscr{B}}(r) \equiv \{y \in M : d(x, y) \leqslant r\};$$

$$\Sigma(r) \equiv \{y \in \bar{\mathscr{B}}(r) : y \text{ 可用最短测地线与 } x \text{ 连接}\}.$$

只要证明

$$\bar{\mathscr{B}}(r) = \Sigma(r), \quad \forall r,$$

(5)就成立了．从定理 2 知：对充分小的 r 这件事是对的．所以若令

$$\mathscr{T} \equiv \{r \in [0, \infty) : \bar{\mathscr{B}}(r) = \Sigma(r)\},$$

那么 $\mathscr{T}$ 是非空的并且有内点．剩下来只须证明 $\mathscr{T}$ 既开又闭．因为这时可由$[0, \infty)$的连通性导出 $\mathscr{T} = [0, \infty)$，我们的目的便达到了．

$\mathscr{T}$ 的闭性是测地线连续依赖于初始切向量这一事实的直接推论．

为证 $\mathscr{T}$ 的开性，我们要用定理 2 及引理 1 的下列推论：

(＊) 给定 M 中一个紧致集合 K，存在$\varepsilon > 0$，使得对 M 中任意两点 y, z，只要 $y \in K, d(y, z) \leqslant \varepsilon$，则可用一条最短测地线连接 y 与 z。

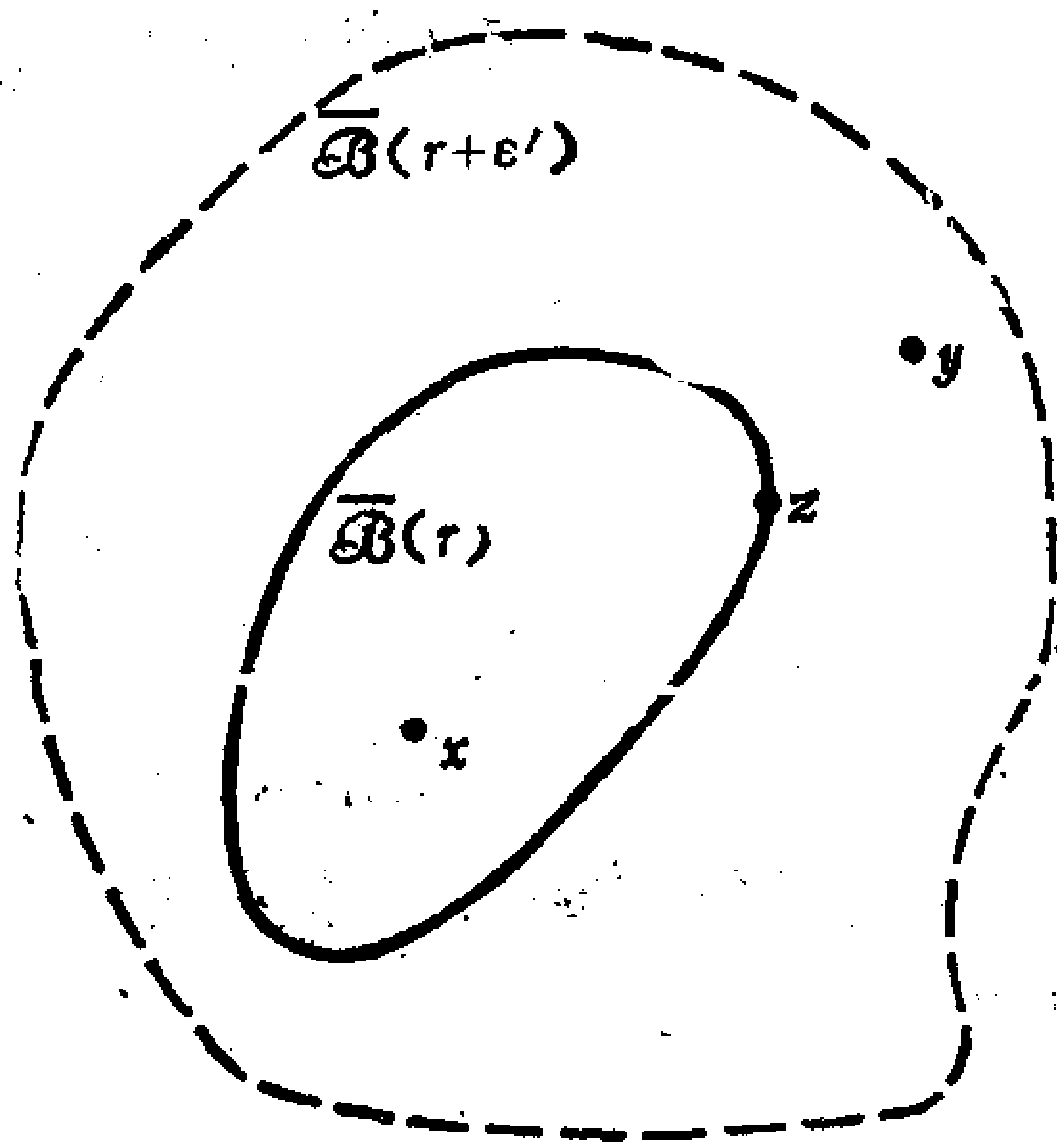


图 3.4

现在设 $r \in \mathscr{T}$，取(＊)中的K为 $\bar{\mathscr{B}}(r)$（注意：因 $r \in \mathscr{T}$，故 $\bar{\mathscr{B}}(r) \subset \bar{B}_r$，从而 $\bar{\mathscr{B}}(r)$ 是紧致的)，此时便有 $\varepsilon > 0$ 具有(＊)

中提到的性质。我们现在证明：对于任意 $\varepsilon' < \varepsilon$，有 $(r + \varepsilon') \in \mathscr{T}$。

设 $y \in \bar{\mathscr{B}}(r + \varepsilon')$，如果 $y \in \bar{\mathscr{B}}(r)$，那么 $y \in \Sigma(r) \subset \Sigma(r + \varepsilon')$。如果 $y \in \bar{\mathscr{B}}(r + \varepsilon') - \bar{\mathscr{B}}(r)$（见图 3.4），那么存在 $z \in \partial\bar{\mathscr{B}}(r)$ 使得

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

（用 d 的定义及 $\partial\bar{\mathscr{B}}(r)$ 的紧致性简单论证可知 z 的存在）。x 与 z 可以用一条最短测地线 γ_1 连接。因为

$$d(z, y) = d(x, y) - d(x, z) \leqslant (r + \varepsilon') - r = \varepsilon' < \varepsilon,$$

所以 z 与 y 也可用一条最短测地线 γ_2 连接（用(∗)）。将 γ_1 接上 γ_2 就得到一条曲线，它是连接 x 至 y 的最短曲线，故必是最短测地线，从而 $y \in \Sigma(r + \varepsilon')$。证毕。

习题 3. 试证完备黎曼流形上任意有界向量场一定是完备的。具体说来，如果 X 是一个向量场，并存在一个常数 c，使得 $|X| \leqslant c$，那么 X 的每条极大积分曲线必是定义在整个 $\boldsymbol{R}$ 上。又问，有界性假设真是必要吗？为什么？

完备黎曼流形的最重要例子有：

(1) 具有平坦度量的 $\boldsymbol{R}^n$；

(2) $\boldsymbol{R}^n$ 中子流形 M，它还是 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭子集（用定理 6 的 (4) 来证它的完备性）；

(3) **紧致黎曼流形**（用定理 6 的(4)证完备性）；

(4) **齐性黎曼流形**．按定义，一个黎曼流形 M 是齐性的并且仅当对任意 $x, y \in M$，存在一个等距同构 $\varphi: M \to M$，使得

$$\varphi(x) = y.$$

§ 4　等距变换和空间形式

本节参考文献

[GKM]，　§§ 4.1，4.2。

[S8，II]，　第七章的附录一．

[KN，I]，第五章．

[H4]，　　§ 6.7．

在讨论常曲率流形的几何学之前，我们希望回到§ 1 的注记 7 所提到的一个老的论题，即如何去判定某一些黎曼度量有足够的兴趣，并对它开展有价值的研究．首先，度量应当是完备的．正如在分析中那样，如果没有完备性的假设，要去证明定理简直是太困难了．当然最近对形如 $M = M' - V$ 的(连通)黎曼流形也产生了某些兴趣，这里 M' 是一个紧致的黎曼流形，V 是一个紧致的子流形．这样的M是"极不完备"的，但人们之所以对这样的M还有兴趣去证明一些结果，其理由是因为它的完备化(即 M')是一种极易为人接受、理解的完备黎曼流形，换言之，它是紧致的．所以甚至在这种情形下，完备性仍然是隐含地被假设着．从现在起，我们将集中于完备黎曼流形．被广泛地研究的黎曼流形可分成两大范畴．

(1) **曲率保持定号的黎曼流形**，即截面曲率 $\geqslant 0$，Ricci 曲率 < 0 等等．曲率张量及其各种各样有关的量(见§ 2)是黎曼度量的最重要的不变量．注意，它是一个二阶不变量(见§ 2 的注记 1)．顺便注意到，在自然界的各种事物对数"2"有着特别的宠爱．在微积分中，二阶导数提供了关于临界点的最重要的信息，牛顿引力定

律是平方反比规律，电荷的库仑定律也如此，物理中最重要的方程(Schrödinger, Laplace, Poisson 等等)为二阶的，等等．人们能够说，理解曲率张量乃是微分几何中两、三个最重要的问题之一．几何中带有普遍性的主题乃是讨论曲率与拓扑之间的关系．在这条线索下，最简单的定理是 Bonnet-Myers 定理(见§7)，它说：Ricci 曲率以一个正常数为下界的完备黎曼流形是紧致的．而对于负截面曲率的度量，主要的问题是研究黎曼流形的基本群与几何结构之间的相互作用，见§5中的 Cartan-Hadamard 定理及其推论．对于正截面曲率的度量来说，其总体的图景几乎是一无所知，甚至到现在为止我们还不知道在 $S^2\times S^2$ (S^2 为 $\boldsymbol{R}^3$ 中2维单位球面)上能否配备一个正截面曲率的黎曼度量． 对于"截面曲率的正性能对流形带来怎样的拓扑含义"这样一个广泛的问题仍然保持空白．在过去的十年间，对 Ricci 曲率已作出了某些坚实的进展，其中某些定理在后面将会提到．在§2末，我们已给出了与数量曲率有紧密关系的一些最重要问题的参考文献．

剩下要指出的是，在讨论曲率保持定号的度量时必须先假设度量的完备性，然后再去导出这个流形的拓扑性质．一方面，在任何微分流形上能配备一个完备的黎曼度量，使得其曲率(不一定保持定号)能像人们所希望的那么小．这是因为对于紧致流形M，如K是给定黎曼度量g的截面曲率，则对任意一个正常数 A，Ag 的截面曲率 K_A 满足

$$K_A=\frac{1}{A}K. \tag{4.1}$$

而对非紧致流形M，已经证明(见[G3])，如δ是M上的一个正的连续函数，则在M上存在一个完备的黎曼度量，其截面曲率K能满足

$$|K|<\delta,$$

即对所有 $x\in M$ 及 M_x 中所有2-平面 π，有$|K(\pi)|<\delta(x)$，但另一方面，任何非紧致流形M能赋以这样的一个黎曼度量，使得其

曲率张量K满足

$$a^2 < K < b^2 \quad 或 \quad -a^2 < K < -b^2,$$

这里 a, b 是任意的互不相等的正数(见[G4])。所以从 Cartan-Hadamard 定理(§5)的观点来看，这样的负曲率度量一般地说，必须是非完备的。从上述的Bonnet-Myers 定理也知这样的正曲率度量同样必须是非完备的。

(2) 具有丰富的"对称性"的流形。这里所谓**对称性**是指黎曼流形到其自身上的一个等距变换。这种流形的一个例子是在§3末所定义的**齐性黎曼流形**。能够容易地用李群理论来构造出许多齐性黎曼流形(见[CE]，第三章)。可以看到，当黎曼流形上存在着许多对称性时，计算往往显得很容易(见§2习题7前面的一段讨论)。应当指出："大多数"的黎曼流形除了恒同变换外，不具有任何对称性，但是一些常见的黎曼流形(如球面、柱面等等)往往有许多对称性，而这些例子很重要，它们是构造一般理论的基础。直到前不久，已知的具有正截面曲率的紧致流形全都与齐性空间微分同胚。

具有"最大"对称性的齐性流形是所谓**两点齐性空间**，即对给定的两组点对 p_1, p_2 及 q_1, q_2, 只要

$$d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2),$$

就必存在一个等距变换 $\varphi: M \to M$，使得

$$\varphi(p_i) = q_i, \quad i = 1, 2.$$

单连通的常曲率完备黎曼流形必为两点齐性空间，证明将在下节给出(对于两点齐性空间的分类及有关文献可看[H3]中第九章§5)。紧接在两点齐性空间后面的是所谓**对称空间**：黎曼流形 M 是对称空间的充要条件是：对每一 $x \in M$，存在着一个等距 $\varphi: M \to M$，它是关于点 x 的测地反射，即对任何一条过 x 点的测地线 $\gamma(\gamma(0) = x)$，则对在 $\gamma(t)$ 的定义域范围内的 t，总有

$$\varphi(\gamma(t)) = \gamma(-t).$$

习题 1. 设M是对称空间,(1) 证明M是完备的;(2) 证明M是齐性的;(3) 证明M在§2 的习题 9 的意义下是局部对称的.

已经知道,单连通的局部对称完备黎曼流形必为对称空间,这能利用 Cartan-Ambrose-Hicks 定理来证明 (见 [CE] 中第 71 页). 要证明两点齐性空间必为对称空间并不容易,它用到了李群论的深入的结果(见 [H3],同上).我们在这里必须指出:虽然对称空间(或**齐性空间**)的定义是用几何方式来表征的,但其较深入的研究基本上是代数的研究。这是因为由等距变换全体所生成的李群控制了一切.

长期以来,对"具有许多对称性的黎曼流形"的研究主要仅限于齐性流形. 但是具有"部分齐性"的流形同样值得研究. 这一点可以从二维的情形中得到说明: 除了圆球面及平坦的 $\boldsymbol{R}^2$ (它们是 $\boldsymbol{R}^3$ 中仅有的齐性曲面)之外,人们对仅仅在一个方向上有对称性的旋转面也同样感到兴趣. 下面两篇文献将给出对这个颇有希望的领域进行研究的一些思想 ([HTY], [H5]).

现在我们开始对**空间形式**, 即常(截面)曲率的完备黎曼流形进行研究. 与其相关的基本结果是:

定理 1 对每一 $c\in\boldsymbol{R}$ 及所有 $n\in\boldsymbol{Z}^+$,存在唯一的 (只差一个等距的)常截面曲率 c 的单连通 n 维空间形式.

为了不干扰我们讨论的连续性, 这定理的完整的证明将在下节末给出. 目前我们只注重于定理的存在性部分, 同时在此过程中导出许多具有独立兴趣的事实. 首先, 从(4.1)知道, 我们只需考虑(截面)曲率 $c=0$, $+1$, -1 的空间形式. 对于 $c=0$, 具有平坦度量的 $\boldsymbol{R}^n$ 就是这样的一个空间形式. 对于 $c=+1$, 在§2 中曾提到: 单位球面 $S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是一个候选的对象. 而配备着所谓**双曲度量**,即

$$\frac{4}{\left(1-\sum_i (x^i)^2\right)^2}\sum_i \mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^i \qquad (4.2)$$

的单位球 $B^n \subset \boldsymbol{R}^n$ 提供了所需要的 $c=-1$ 的空间形式. 我们在导入了某些有用的思想后将来证明最后这两个结论.

设M是黎曼流形$\overline{M}$的子流形,在M上配备着诱导度量.如果 $\overline{M}$ 中的任一条与M相切的测地线全部位于M之中,则称M是 $\overline{M}$ 中的**全测地子流形**. 可以看到, $\overline{M}$ 中如定义所述的测地线也必须是M中的一条测地线, 这能用§1的习题5或用§3中的定理2去直接证明. 通常的嵌入 $\boldsymbol{R}^k \hookrightarrow \boldsymbol{R}^n$, $(k<n)$, 给出了全测地子流形的一个例子.

引理 2 M是 $\overline{M}$ 的全测地子流形的充要条件是: 对 M 中任何向量场X和 Y, $D_XY=\bar{D}_XY$, 这里 D, $\bar{D}$ 分别为 M, $\overline{M}$ 的 Levi-Civita 联络.

证明 首先设M是 $\overline{M}$ 的任一子流形. 对M中任意的向量场 X, Y, 定义

$$S(X,Y)\equiv D_XY-\bar{D}_XY,$$

$S(X,Y)$是 $\overline{M}$ 中的仅仅定义在M上的向量场. 注意: 对M上任意函数f,

$$S(fX,Y)=S(X,fY)=fS(X,Y).$$

于是我们定义 $S:M_x\otimes M_x\to\overline{M}_x$ 为

$$S(v,w)=S(V,W),\quad \forall v,w\in M_x,$$

这里 V, W 分别是 v, w 在M上的任意延拓. 可直接验证

$$S(v,w)=S(w,v),$$

即在每个 M_x 上, S定义了一个对称的双线性型.

现假设M是 $\overline{M}$ 的一个全测地子流形. 我们断言:

$$S(v,v)=0,\quad \forall v\in M_x,$$

这里 x 是M中的任一点. 事实上,设 γ 是 $\overline{M}$ 中使 $\dot{\gamma}(0)=v$ 的测地线,则 $\bar{D}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$. 由假设, γ 也是M的测地线, 所以 $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$, 于是

$$S(v,v)=D_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}-\bar{D}_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma}=0,$$

所以 $S \equiv 0$. 因此对M上所有向量场 X, Y, 有

$$D_X Y = \bar{D}_X Y.$$

反之，将上述证明倒推过去就可得到充分性的证明. 更精确地说，假设 $S \equiv 0$. 给定 $x \in M$, $v \in M_x$, 在 $\bar{M}$ 中作一条使 $\dot{\gamma}(0) = v$ 的测地线 γ, 我们必须证明 γ 位于M之中. 设 ξ 为M的测地线，使得 $\dot{\xi}(0) = v$, 于是对所有 t,

$$\bar{D}_{\dot{\xi}(t)}\dot{\xi} = D_{\dot{\xi}(t)}\dot{\xi} = 0,$$

所以 ξ 也是 $\bar{M}$ 中的测地线. 由测地线关于初始条件的唯一性知道 $\xi = \gamma$. 特别有 $\gamma \subset M$. 证毕.

注记. 上面所定义的 S 被称为是M在$\bar{M}$ 中的**第二基本形式**. 于是引理 2 可表示为：子流形为全测地的充要条件是它的第二基本形式恒为零. 对于第二基本形式的全面的讨论，见下面的 § 13.

引理 3 假设M是 $\bar{M}$ 的一个全测地子流形，设 K, $\bar{K}$ 分别为 M, $\bar{M}$ 的截面曲率函数. 则对每一个 2-平面 $\Pi \subset M_x$ 及所有 $x \in M$, 有

$$K(\Pi) = \bar{K}(\Pi).$$

证明 这是引理 2 及 K, $\bar{K}$ 的定义的直接推论. 证毕.

在证明下面的引理之前，我们希望去讨论一个特殊情形，但它已包含了在一般情形下的主要思想. 设 $\gamma:(a, b) \to \bar{M}$ 是一条以弧长为参数的曲线，且假设存在一个等距 $\varphi: \bar{M} \to \bar{M}$, 使得 γ 正好是 φ 的**固定点集合**，即

$$\{y \in \bar{M}: \varphi(y) = y\} = \gamma((a, b)).$$

于是我们可以断言：γ 是一条正规测地线. 为此，先证明在黎曼流形之间的一个等距必把测地线映到测地线. 这是因为等距变换必须把一条局部长度极小化的曲线变到一条局部长度极小化的曲线，于是应用§ 3 的定理 2，或应用§2的习题 5 后就可证得. 进而，固定 $t_0 \in (a, b)$, 且设 ζ 为 $\bar{M}$ 中的一条使 $\dot{\zeta}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$ 的测地线. 现在 $d\varphi(\dot{\zeta}(t_0)) = \dot{\zeta}(t_0)$, 所以 ζ 及 $\varphi(\zeta)$ 同时为 $\bar{M}$ 的测地

线，且有相同的初始条件

$$\dot{\zeta}(t_0)=\dot{\varphi}(\zeta)(t_0)(=\dot{\gamma}(t_0)).$$

由唯一性，$\zeta=\varphi(\zeta)$，所以 ζ 位于 $\{y\in\bar{M}:\varphi(y)=y\}$ 之中．由假设知道后者等于 $\gamma((a,b))$，所以在它们的公共定义域中，ζ 与 γ 相同．因为上述结论对每一个 $t_0\in(a,b)$ 都成立，所以 γ 为一条正规测地线．更一般地，有

引理 4 一个等距变换的固定点集是一个全测地子流形（不一定连通）．

证明 设 $\varphi:\bar{M}\to\bar{M}$ 是所给出的等距，且设

$$M=\{y\in\bar{M}:\varphi(y)=y\}.$$

我们将证明M有一个子流形的结构．设 $x\in\bar{M}$，令

$$B(\delta)\equiv\{v\in\bar{M}_x:|v|<\delta\},$$

且令

$$B_\delta=\{y\in\bar{M}:d(x,y)<\delta\}.$$

由§3的定理2，我们可以假设 δ 是如此小，以致使得

$$\exp_x:B(\delta)\to B_\delta$$

是一个微分同胚．设 $\mathscr{F}\subset\bar{M}_x$ 定义为

$$\mathscr{F}\equiv\{v\in\bar{M}_x:\mathrm{d}\varphi(v)=v\},$$

注意：$\mathscr{F}$ 是 $\bar{M}_x$ 中的一个向量子空间．我们断言：$M\cap B_\delta=\exp_x(\mathscr{F}\cap B(\delta))$．因为$\exp_x(\mathscr{F}\cap B(\delta))$显然是 $\bar{M}$ 的子流形，于是M是 $\bar{M}$ 的子流形．一旦我们知道了M是一个子流形，则利用与引理4前面的那段论证相同的理由可证明M是全测地的，这就证明了引理．为了证明这个断言，首先设 $y\in M\cap B_\delta$．又设 $v\in B(\delta)$ 满足 $\exp_x v=y$，且设 $\gamma:[0,1]\to\bar{M}$ 是唯一的最短测地线 $\gamma(t)=\exp_x(tv)$，它连接 x 到 y（见§5定理2）．因为 $x,y\in M$，所以 $\varphi(x)=x$ 及 $\varphi(y)=y$．因为 φ 是一个等距，于是 $\varphi(\gamma)$ 也是一条连接 x 到 y 的最短测地线．由唯一性知道 $\varphi(\gamma)=\gamma$．特别 $\mathrm{d}\varphi(\dot{\gamma}(0))=\dot{\gamma}(0)$，即 $\mathrm{d}\varphi(v)=v$，于是 $v\in\mathscr{F}$，它蕴含 $y\in$

$\exp_x(\mathscr{F}\cap B(\delta))$. 这证明了 $M\cap B_\delta\subset\exp_x(\mathscr{F}\cap B(\delta))$. 为了证明反过来的包含关系，设 $y=\exp_x v$，这里 $v\in\mathscr{F}\cap B(\delta)$. 我们要证明 $y\in M\cap B_\delta$. 设 γ: $[0,1]\to\bar{M}$ 为测地线，$\gamma(t)=\exp_x(tv)$. 因为 $d\varphi(v)=v$，我们有 $d\varphi(\dot\gamma(0))=\dot\gamma(0)$. 由前面相仿的理由知道，$\varphi(\gamma)=\gamma$，且特别地，$\varphi(y)=\varphi(\gamma(1))=\gamma(1)=y$，于是 $y\in M\cap B_\delta$. 证毕.

我们知道，全测地子流形的例子是十分稀少的，几乎所有的黎曼流形都没有任何全测地子流形. 但是，当黎曼流形具有一个非平凡的等距时，引理 4 表明这个等距的固定点集将提供了全测地子流形的一个例子.

习题 2. 设 M 为 $\bar{M}$ 的子流形. 证明: M 在 $\bar{M}$ 中是全测地的充要条件是切从 TM 关于 $\bar{M}$ 的 Levi-Civita 联络 $\bar{D}$ 是平行的，即对每一条曲线 γ: $[0,1]\to M$，有 $P^\gamma(M_{\gamma(0)})=M_{\gamma(1)}$，这里 P^γ 是 $\bar{D}$ 的平行移动.

现在我们要用前面所述的引理去研究:

引理 5 单位球面 $S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 具有常截面曲率 $+1$，$\forall n\geqslant 2$.

证明 首先设 $n\geqslant 3$，由 $\tilde\varphi(x^1,x^2,x^3,x^4,\cdots,x^{n+1})=(x^1,x^2,x^3,-x^4,\cdots,-x^{n+1})$所给出的等距 $\tilde\varphi:\boldsymbol{R}^{n+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 诱导了一个等距 $\varphi:S^n\to S^n$. 进而，φ 的固定点集正好是 $S^2\subset\boldsymbol{R}^3\equiv\{(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0):x^i\in\boldsymbol{R}\}$. 由引理 4 知道，$S^2$ 是一个全测地子流形. 由引理 3，连同§2 的习题 8 一起可知 S^n 的截面曲率等于 $S^2\subset\boldsymbol{R}^3$ 的高斯曲率. 利用 Gauss 的 Egregium 定理能容易地算出高斯曲率为主曲率的乘积，如所知，它等于$+1$.（直接的证明可见下面的习题 3 和 4.）

$n=2$ 是前述讨论的一部分. 证毕.

习题 3. 设 M 是一个 2 维黎曼流形，且设 $\{x,y\}$ 为局部坐标系，使得在这个坐标系下黎曼度量为 $h(dxdx+dydy)$，这里 h 是一个正的 C^∞ 函数，而 $dxdx\equiv dx\otimes dx$ 等等. 证明高斯曲率为 $-\frac{1}{2h}\Delta\log h$，其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

习题 4. 设 S 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中以 (0, 0, 1/2) 为中心，半径为 1/2 的球面，令 $p=(0,0,1)\in S$，并且设 $\sigma: S-\{p\}\to\boldsymbol{R}^2$ 是从 p 到 $\boldsymbol{R}^2$ 上的球极投影，即 $\sigma(x^1,x^2,x^3)=\left(\dfrac{x^1}{1-x^3},\dfrac{x^2}{1+x^3}\right)$. 如 g 为 $\boldsymbol{R}^2$ 上的黎曼度量，使得 σ^*g 等于在 $S-\{p\}$ 上的诱导度量，则

(1) 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上我们有

$$g=\frac{1}{(1+(x^2+y^2))^2}(\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\mathrm{d}y); \tag{4.3}$$

(2) S 的高斯曲率为 4;

(3) 单位球面 $S^2\subset\boldsymbol{R}^3$ 的高斯曲率为 1.

引理 6 配备着双曲度量(4.2)的单位球 $B^n\subset\boldsymbol{R}^n$ 是常截面曲率为 -1 的完备黎曼流形.

证明 在这个证明中所提到的每一件事都是参照于双曲度量而言的. 我们先证明完备性. 考虑曲线 $\zeta:[0,\infty)\to B^n$ 为 $\zeta(s)=\left(\dfrac{e^s-1}{e^s+1},0,\cdots,0\right)$，由直接计算知道参数 s 是弧长参数，而且 $\zeta([0,\infty))$ 是由 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)\longmapsto(x^1,-x^2,\cdots,-x^n)$ 所给出的等距 $B^n\to B^n$ 的固定点集. 由前面引理 4, ζ 是一条测地线. 因为 $\boldsymbol{R}^n$ 的正交线性变换限制在 B^n 上时就成为双曲度量的等距，于是每一条 $A(\zeta):[0,\infty)\to B^n$ 都是测地线，这里 A 是任何的正交变换. 于是所有从原点 O 发出的测地线可以无限延伸. 故由 Hopf-Rinow 定理(§3 中定理 6 的(3))知道，双曲度量是完备的.

为证明 B^n 是曲率 -1 的空间形式，取任何 2-平面 $\Pi\subset B^n_p$, $p\in B^n$，我们必须证明 $K(\Pi)=-1$(K 为双曲度量的截面曲率). 把 B^n_p 与 $\boldsymbol{R}^n$ 本身恒同，设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中包含 Π 及 p 的一个 3 维向量子空间（如 Π 已包含了 p，或如 $p=0$，这样的 E 将不是唯一确定的）. 令 $\boldsymbol{R}^n=E\oplus E^\perp$（正交直和），映射 $(e,e')\longmapsto(e,-e')$, $(e\in E, e'\in E^\perp)$, 对 B^n 的限制正好是一个等距，它以 $E\cap B^n$ 为固定点集. 于是 B^n 的子流形 $E'\equiv E\cap B^n$ 是全测地的.

由引理 3 知道只需在（具有诱导度量的）E' 中计算 Π 的截面曲率。因为每一个正交变换 A 总是 B^n 到其自身上的一个等距，现选取 A,使得 $A(E)=\mathbf{R}^3\equiv\{(x^1,x^2,x^3,0,\cdots,0)\}$，于是我们可以假设 $E'=B^3\equiv B^n\cap\mathbf{R}^3$. 因此只要去证明 B^3 在其双曲度量下具有常截面曲率-1.

我们在 B^3 上利用通常的球面坐标 $\{\rho,\varphi,\theta\}$. 于是双曲度量在 $B^3-\{0\}$ 上可写成

$$\frac{4}{(1-\rho^2)^2}(d\rho^2+\rho^2 d\theta^2+\rho^2\cos^2\theta d\varphi^2),$$

这里 $d\rho^2=d\rho\otimes d\rho$，等等. 现定义

$$X_1=\frac{1-\rho^2}{2}\frac{\partial}{\partial\rho},\quad X_2=\frac{1-\rho^2}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad X_3=\frac{1-\rho^2}{2\rho\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

于是有 $\langle X_i,X_j\rangle=\delta_{ij}$ 及

$$[X_1,X_2]=-\frac{1+\rho^2}{2\rho}X_2,$$

$$[X_2,X_3]=-\frac{1-\rho^2}{2\rho}\mathrm{tg}\,\theta\cdot X_3,$$

$$[X_1,X_3]=-\frac{1+\rho^2}{2\rho}X_3.$$

根据这些括号关系，我们就能利用§1 中的(1.10)去对所有 i,j 确定 $D_{X_i}X_j$. 所以通过直接计算就得

$$R(X_i,X_j,X_k,X_l)=(\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{ik}\delta_{jl}).$$

这等价于常截面曲率为-1.

注记. 比起引理 5 来，引理 6 的证明更是精心制作的，这是因为没有显然的方式可以看出 B^n 关于双曲度量是齐性黎曼流形. 但是下面 §5 的推论 14 表明它确实是这样. 又注意到在单位圆盘 $\mathscr{D}=\{x^2+y^2<1\}$ 上的双曲度量

$$\frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2+dy^2) \tag{4.4}$$

是经典的 Poincaré 度量，在这个度量下 $\mathscr{D}$ 是一个完备的单连通、具有高斯曲率 -1 的黎曼流形。$\mathscr{D}$ 中的测地线是与单位圆周 $\{x^2+y^2=1\}$ 正交的圆弧，其完全**等距变换群**正好是 $C(=R^2)$ 的分式线性变换，它将 $\mathscr{D}$ 映到 $\mathscr{D}$ 上。证明这些结论乃是复变函数论中的一个标准的习题。这个度量不仅在单变量的自守函数论，而且同时在全纯映射的一般理论中也是极为重要的（例如见 [K6]）。

下面我们将对 R^n, S^n 及 H^n 中测地线的性质进行研究（从现在开始，H^n 将表示配备着双曲度量的单位球）。重要的结论将是：以 R^n 作为标准，从 S^n 的一点发出的测地线将挤在一起，而 H^n 中的测地线将散开。因为 R^2, S^2, H^2 为 R^n, S^n, H^n 的全测地子流形，于是只需对 R^2, S^2 及 H^2 证明上述结论。

现设M为 R^2, S^2 或 H^2 中的任意一个，并选定了一个参考点 $O\in M$。定义半径为 r 的**测地圆周**是

$$C(r)=\{x\in M:\mathrm{d}(0,x)=r\}.$$

当 r 充分小时，$C(r)$ 是切空间 M_O 中半径为 r 的圆周在微分同胚$\exp_O$下的像，于是 $C(r)$ 的长度作为 r 的函数就度量了M中从 O 点散开出去的测地线(相对于 R^2 中径向测地线)的散开率。

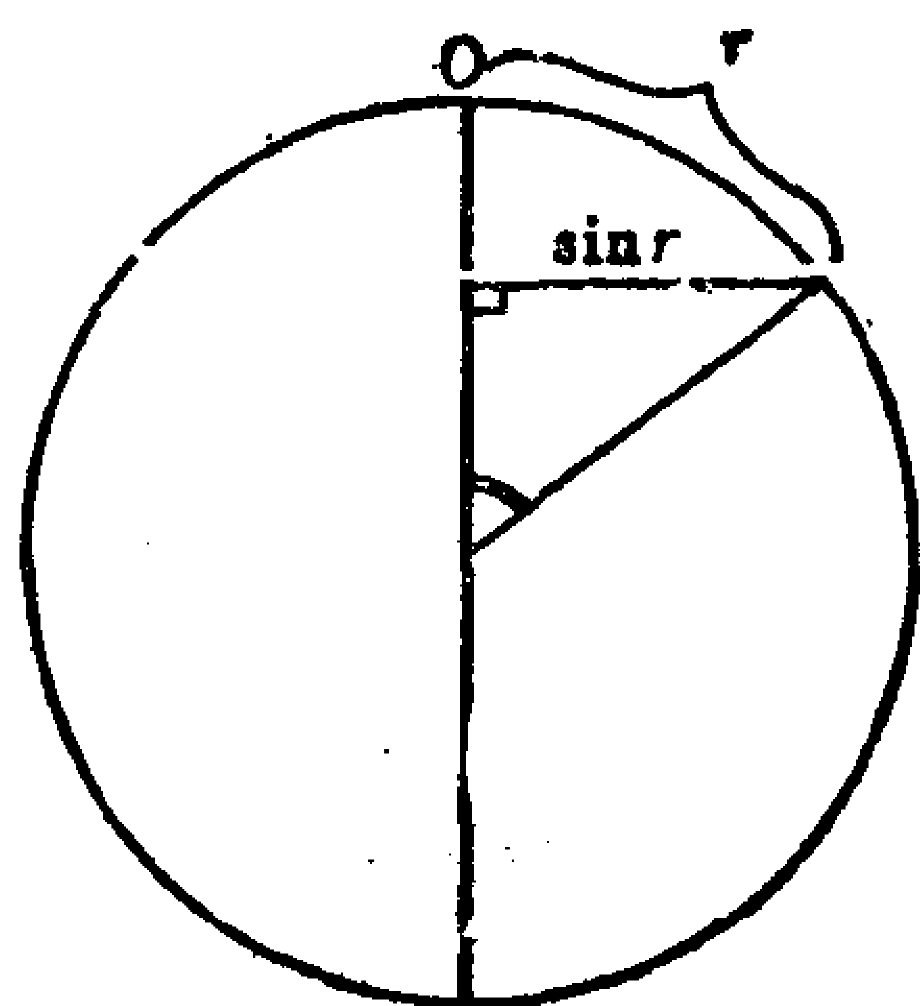


图 4.1

设 $c_0(r)$, $c_+(r)$, $c_-(r)$ 分别是 R^2, S^2 及 H^2 中 $C(r)$ 的长度。如 $M=R^2$, O 为原点，则显然有 $c_0(r)=2\pi r$。现在设$M=S^2$，且设O为北极点$(0,0,1)$。显然首先 S^2 的测地线为大圆，设给定的大圆为 $\gamma=\Pi\cap S^2$。其中Π是 R^3 的一个 2 维子空间，R^3中关于Π的反射诱导了 S^2 的一个等距，它正好把γ作为它的固定点集，于是由引理 4 知道，γ为全测地子流

形。现在从图 4.1 中看出：半径为 r 的测地圆周是一个半径为 $\sin r$ 的圆周（在欧氏意义下），于是 $c_+(r)=2\pi\sin r$。最后设 $M=H^2$,我们设 O 是单位球的原点(在§5 的推论 14 中将看到 H^2 确实是齐性的,于是 O 的选取并不影响 $c_-(r)$)。在引理 6 的证明中我们已经看到从 O 出发的正规测地线是曲线 $\gamma:[0,\infty)\to H^2$,使得

$$\gamma(s)=\left(\frac{e^s-1}{e^s+1}\right)\bar{u}\equiv \operatorname{th}\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\bar{u},$$

这里 $\bar{u}$ 是在 $\boldsymbol{R}^2$ 的单位圆周上的任何一点。于是从点集论的角度来看，$C(r)$ 正好是(欧氏的)半径为 $\operatorname{th}\frac{r}{2}$ 的欧氏圆周。因为 Poincaré 度量(4.4)能借助于极坐标 ρ,θ 写成

$$\frac{4}{(1-\rho^2)^2}(\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2),$$

我们有

$$c_-(r)=\int_0^{2\pi}\frac{2}{(1-\rho^2)}\rho\,\mathrm{d}\theta\Big|_{\rho=\operatorname{th}\frac{r}{2}}=4\pi\frac{\operatorname{th}\frac{r}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{r}{2}}=2\pi\operatorname{sh}r.$$

综上所述，我们有

$$\begin{cases}c_0(r)=2\pi\cdot r,\\ c_+(r)=2\pi\cdot\sin r,\\ c_-(r)=2\pi\cdot\operatorname{sh}r.\end{cases}\tag{4.5}$$

从图 4.2 中我们能一下子看出这三个函数的相对变化情形。现在我们看出，至少在空间形式的情况下，负曲率把测地线推开，而正曲率把测地线拉在一起。于是产生了这样的问题：这是一个偶然的现象呢，还是它表明了在曲率的**符号**与测地线性质之间的一个一般性的相互关系？

为了回答这个问题，我们必须在一般情形下对半径为 r 的测

地圆周 $C(r)$ 的长度 $c(r)$ 进行计算.设 M 是一个完备的2维黎曼流形,$O\in M$ 是一个参考点,$C(r)$ 如通常那样相对于 O 而被定义。设 (ρ,θ) 为切空间 M_O 中的极坐标,设 δ 为任何一个使 $\exp_O$ 在 $B(\delta)\equiv\{v\in M_O:\rho(v)<\delta\}$ 上为微分同胚的正数。曲线 $\tilde{\gamma}:[0,2\pi]\to B(\delta)$ 为 $\tilde{\gamma}(\theta)=(r,\theta)$,它是 M_O 中半径为固定数 $r<\delta$ 的圆周。于是

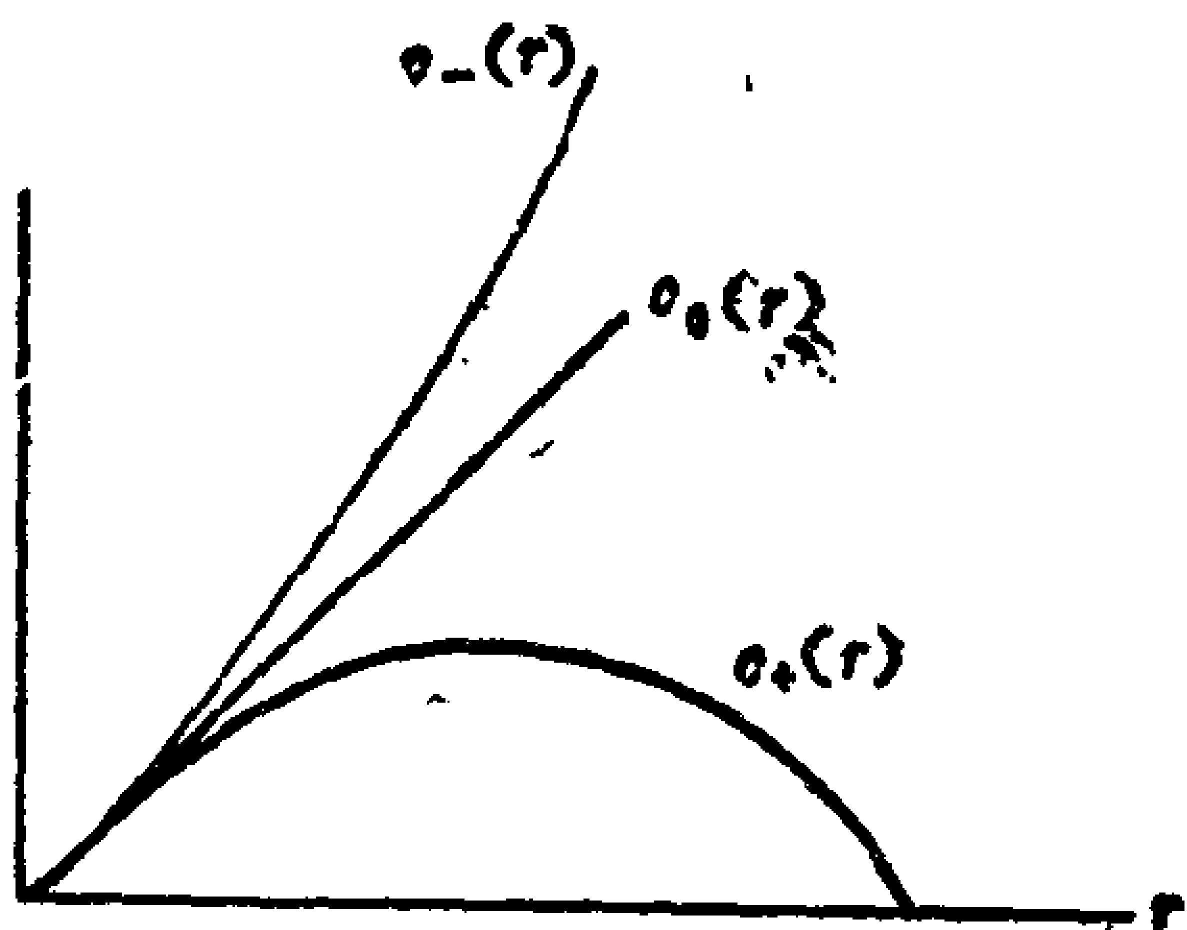


图 4.2

$$c(r)=\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{d}\exp_O\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(r,\theta)\right)\right|\mathrm{d}\theta \tag{4.6}$$

要注意:在(4.6)中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}$ 是垂直于径向方向的向量场。为了理解 $C(r)$,并最终理解流形的测地线的性质,我们不必考虑 d exp 对径向方向的影响。由于2维的特殊情形并不使问题特别得到简化,于是我们就考虑一般的情形.

我们先从一些与目前要讨论的事情并不明显相关的事物出发去开始我们的讨论。所谓 C^∞ **长方形映射**,我们是指一个 C^∞ 映射 $\gamma:[a,b]\times[c,d]\to M$,这里 M 是一个任意的黎曼流形(图4.3),由此可定义两个沿 γ **的向量场** T 及 U 为

$$T(\gamma(t,u))=\mathrm{d}\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}(t,u)\right),$$

$$U(\gamma(t,u))=\mathrm{d}\gamma\left(\frac{\partial}{\partial u}(t,u)\right).$$

每一个 $u\in[c,d]$ 确定了一条由 $\gamma_u(t)=\gamma(t,u)$ 所给出的曲线

$$\gamma_u:[a,b]\to M,$$

并称 γ_0 为 C^∞ 长方形 γ 的**基曲线**(当 $0\in[c,d]$ 时)。如再假设

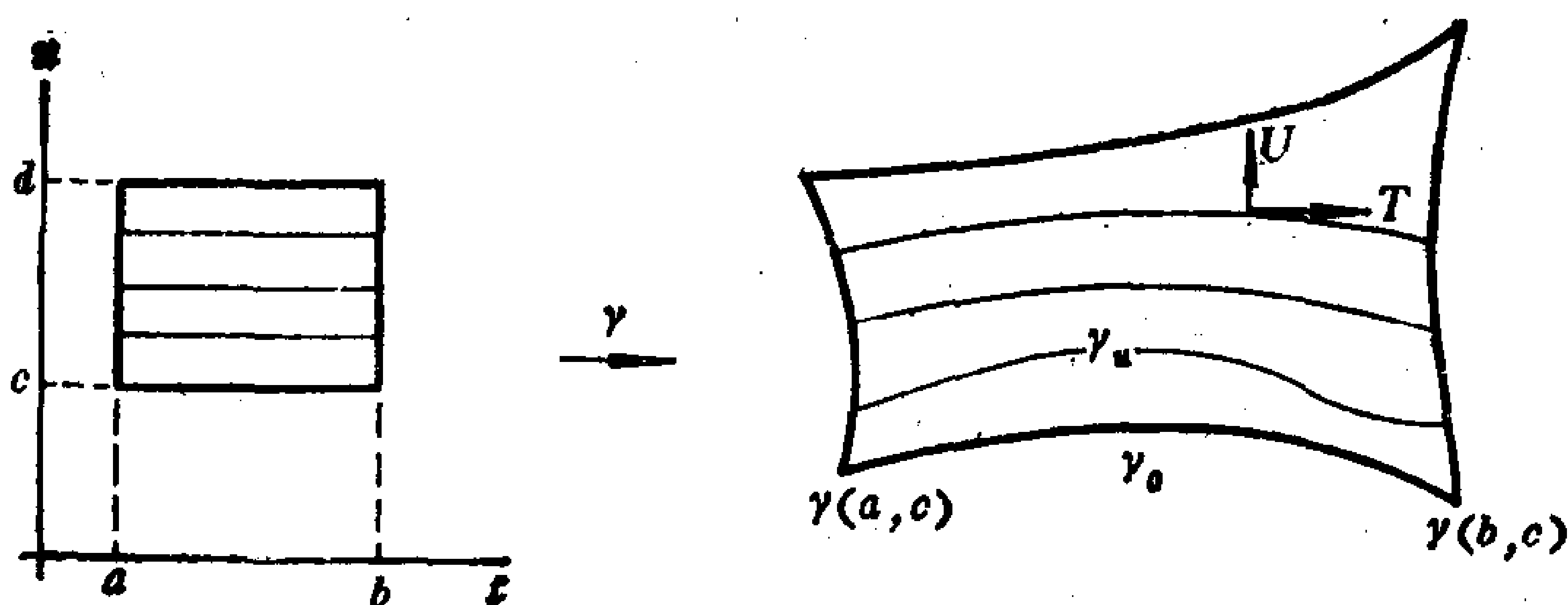


图 4.3

每一条 γ_u 是M 的测地线，则称长方形映射 γ **是单参数测地线族** $\{\gamma_u\}$. 于是我们有

$$\begin{cases}[T,U]=0, \\ D_T T=0.\end{cases} \tag{4.7}$$

前者是因为 $d\gamma\left(\left[\dfrac{\partial}{\partial t},\ \dfrac{\partial}{\partial u}\right]\right)=0$，第二式是因为 T 为切于测地线 γ_u（这里需用 § 1 末所讨论的 γ 上的向量场及诱导映射的概念）. 于是由(4.7)得到

$$\begin{aligned} D_T D_T U &= D_T D_U T = D_T D_U T - D_U D_T T - D_{[T,U]} T \\ &= -R_{TU} T \end{aligned}$$

再将它限制到基曲线 γ_0 上，并把沿 γ_0 的 $D_{\dot\gamma_0} U$ 及 $D_{\dot\gamma_0} D_{\dot\gamma_0} U$ 分别写成 $\dot U$, $\ddot U$, 我们就得到

$$\ddot U + R_{\dot\gamma_0 U}\dot\gamma_0 = 0, \tag{4.8}$$

称沿曲线 γ_0 的，并适合 (4.8) 的向量场为 Jacobi **场**，且称方程(4.8)为沿 γ_0 的 Jacobi **方程**. 我们称向量场 U 为 $\{\gamma_u\}$ 的**横截向量场**，于是得到

引理 7 单参数测地线族的横截向量场沿基曲线是一个 Jacobi 场.

反过来，我们将看到沿一条测地线的每一个 Jacobi 场必为某个单参数测地线族的横截向量场. 但在讨论 Jacobi 场之前，我

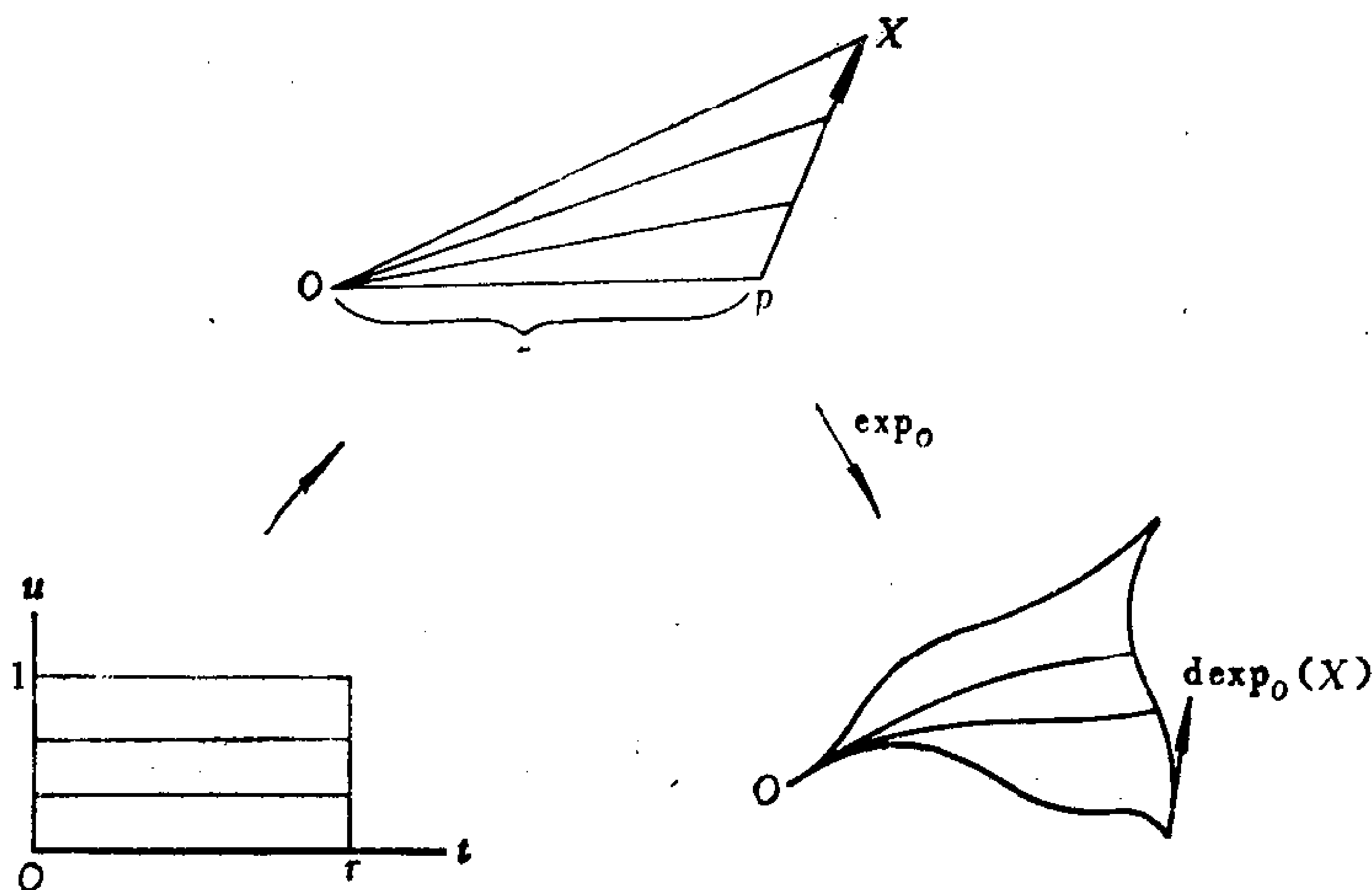


图 4.4

们希望再谈及上述 $c(r)$ 的计算. 我们将证明,$\operatorname{dexp}_O\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)$ 事实上是一个单参数测地线族的横截向量场,于是 Jacobi 方程 (4.8) 提供了曲率与 $\operatorname{dexp}_O\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)$ 之间, 因而也是曲率与 $c(r)$ 之间的决定性的联系. 为了达到这个目的,设M是一个黎曼流形,$O\in M$, 设 $p\in M_O$, 而且在 p 处给定了一个切于 M_O 的向量 X, 于是由 $\Gamma(t,u)=\exp_O\frac{t}{r}(p+uX)$ 所给出的映射

$$\Gamma:[0,r]\times[0,1]\to M \quad (这里\ r=|p|)$$

定义了一个从 O 出发的单参数测地线族(图 4.4), 在这种场合下, 横截向量场对基曲线的限制适合初始条件

$$\begin{cases} U(0)=0, \\ \dot{U}(0)=\dfrac{1}{r}X. \end{cases} \tag{4.9}$$

(4.9)中第二个方程的证明本身也是有兴趣的. 设 δ 是某个正数, 使得如 $B(\delta)\equiv\{v\in M_O:|v|<\delta\}$ 及 $B_\delta\equiv\{x\in M:d(0,x)<$

$\delta\}$，则 $\exp_O: B(\delta)\to B_\delta$ 为一个微分同胚（§3 的定理 2）．设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 M_O 中的一组幺正基，且设 $\{\alpha^1,\cdots,\alpha^n\}$ 为其对偶基，则 $\{\alpha^i\}$ 给出了 M_O 中的整体坐标．现在我们用 $\alpha^i(\exp_O^{-1})=x^i$，$\forall i$，来定义在 B_δ 中的坐标函数 $\{x^1,\cdots,x^n\}$． 这些 $\{x^i\}$ 具有下列性质：

$$\begin{cases}\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}(0),\ \dfrac{\partial}{\partial x^j}(0)\right\rangle=\delta_{ij}, & \forall i,j,\\ D_{\frac{\partial}{\partial x^i}(0)}\dfrac{\partial}{\partial x^j}=0, & \forall i,j.\end{cases}\tag{4.10}$$

其中第一组方程是显然的． 为证明其中第二组，定义 $\beta: M_O\times M_O\to \boldsymbol{R}$ 为

$$\beta(e_i,e_j)=D_{\frac{\partial}{\partial x^i}(0)}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

再利用线性性质把 β 推广到每个变量，这样定义的 β 是一个对称双线型(见§1 的 (L2))．由 $\{x^i\}$ 的定义知道，在坐标系 $\{x^i\}$ 中每条径向直线是一条测地线，所以 $\beta(v,v)=0$，于是 $\beta\equiv 0$，这证明了 (4.10)．

现在回过来证明 (4.9)．相对于 $\{x^i\}$，Γ 成为如下的一个线性映射．我们可以假设 $p=\sum_i p^i e_i$ 及 $X=\sum_i X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，($p^i, X^i\in \boldsymbol{R}$)；设 ε 为充分小的正数，使得 εp 及 $\varepsilon\left(\sum_i X^i e_i\right)$ 均属于 $B(\delta)$，Γ 对 $[0,\varepsilon r]\times[0,\varepsilon]$ 的限制．于是等于

$$\Gamma(t,u)=\frac{t}{r}(\bar{p}+u\bar{X}),$$

这里，相对于坐标系 $\{x^i\}$，$\bar{p}=(p^1,\cdots,p^n)$，$\bar{X}=(X^1,\cdots,X^n)$，基曲线 γ_0 是曲线 $t\longmapsto \dfrac{t}{r}\bar{p}$，于是 U 对基曲线的限制是向量场 $t\longmapsto \dfrac{t}{r}\sum_i X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$．因为 M_O 与它的切空间恒同，所以

$$D_{\dot{\gamma}_0(0)}U = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{r}\right)\Big|_{t=0}\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(0) + \frac{t}{r} D_{\dot{\gamma}_0(0)} \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(0) \qquad (\text{由}(4.10))$$

$$= \frac{1}{r} X.$$

这证明了(4.9). ((4.9)的另一个证明在§5的引理2中给出.)

上面所导入的坐标系 $\{x^i\}$ 由于满足 (4.10), 因而对计算来讲是很有用的. 我们称这个坐标系为以 O 点为中心的**黎曼法坐标系**,或更简单地说,**法坐标系**. (黎曼在其1854年的就职演说中就用了这个坐标系.)

最后我们把这个单参数测地线族 $\Gamma_u(t) = \exp_O \frac{t}{r}(p + uX)$ 应用于2维空间形式 $\boldsymbol{R}^2$, S^2 或 H^2,利用(4.6)中的记号,设 $X = \frac{d}{d\theta}(r, \theta)$ 及 $p = (r, \theta)$, (固定 $r = |p|$). 因为空间形式关于 O 点是旋转对称的(即给定任何两个单位向量 $v_1, v_2 \in M_O$,存在一个等距 φ, 使得 $\varphi(0) = 0$, $d\varphi(v_1) = v_2$). 所有的计算与 θ 无关. 设 γ 是基曲线 Γ_0, 且设 $W(t)$ 是沿 γ 的一个单位平行向量场,使得 $W(t) \perp \dot{\gamma}(t)$, $\forall t$. 因为 $\frac{d}{d\theta}$ 与径向曲线: $t \longmapsto tp$ 垂直,所以由 Gauss 引理(§3引理5)知道,横截向量场对 γ 的限制 $U(t)$ 正交于 $\dot{\gamma}(t)$, $\forall t$, 于是我们可以写

$$U(t) = f(t)W(t),$$

这里 C^∞ 函数 $f(t)$ 定义在 $[0, r]$ 上. 直接的计算表明 (4.8), (4.9)能重写成

$$\begin{cases} \ddot{f} + Kf = 0, \\ f(0) = 0,\ \dot{f}(0) = 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

这里 $K(t)$ 为 $\gamma(t)$ 处的高斯曲率, $\dot{f}, \ddot{f}$ 分别表示 $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}$,

$f'(0)=1$ 是因为 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(r,\theta)\right|=r$。(4.11)的解是

$$f(r)=\begin{cases} r, & K=0, \\ \sin r, & K=+1, \\ \mathrm{sh} r, & K=-1. \end{cases}$$

因此利用 $c(r)$ 的公式(4.6)后，我们就重新发现了在(4.5)中所求出的值 c_0, c_+, c_-。可见 c_0, c_+, c_- 能通过求解(4.11)得出，而在方程(4.11)中已包含了曲率项。

注意：(4.11)中的二阶方程是由 Jocobi 发现的，它与在下面§6中将要研究的二阶变分公式有联系。称初始条件 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=1$ 为**标准的初始条件**。

由空间形式所揭示出来的上述现象，即曲率直接控制测地线性质，可以推广到一般的情形。粗糙地说，正曲率引起测地线坍缩的事实(如从 S^2 的北极点出发的测地线全部收敛于南极那样)告诉我们：充分正曲率的流形必须是紧致的 (Bonnet-Myers 定理)。负曲率引起测地线互相散开的事实导致我们期望：在一点处的指数映射将是一个微分同胚 (Cartan-Hadamard 定理)。

在离开空间形式这一论题之前，我们应当对一个与它们的定义有关的问题作出一些评论。假设 $\dim M \geqslant 3$，如果对每一点 $x \in M$，所有 2-平面 $\Pi \subset M_x$ 具有相同的截面曲率，譬如说 $f(x)$，则很自然地称这样的 M 为**逐点常截面曲率**的黎曼流形。(在 2 维时，这个定义是无意义的，因为每个 2 维黎曼流形都满足这个条件。) M 有常截面曲率的充要条件是 f 为常数。我们当然希望能允许 $f(x)$ 是 x 的一个非常数的函数，但是我们可以证明：流形有逐点常截面曲率的充要条件是它有常截面曲率，这是经典的 Schur **定理** ([S8, II]，第 7—46 页或 [KN, I]，第 202 页)。证明利用了第二 Bianchi 恒等式(§2 的引理 3)。

在本书中我们由于篇幅的限制，只能简要地讨论单连通的空

间形式的研究．这不仅从几何的观点，而且从群论与拓扑的观点来说也是有趣的．所有曲率 +1 的空间形式已被 J. A. Wolf 分类，曲率 −1 的空间形式可能太多了以致难以完全分类，但是为了增进对它们的理解，我们仍然进行着探索；例如对 3 维的情形，Thurston 作出了最新的工作．对这些工作的基本信息可参看 [W8]．

习题 5. (1) 利用习题 3 去直接证明：在单位圆盘 D 上的 Poincaré 度量(4.4)有曲率 −1；

(2) 证明：如 γ 是 D 中的一条(关于 Poincaré 度量的)测地线，且 $p\in D$，$p\bar{\in}\gamma$，则正好存在两条测地线 ζ_1，ζ_2 满足 $\zeta_1(0)=\zeta_2(0)=p$，$\zeta_i\cap\gamma=\varnothing$，使得：

(a) 任何满足 $\zeta(0)=p$，且 $\dot{\zeta}(0)$ 位于 $\dot{\zeta}_1(0)$ 与 $\dot{\zeta}_2(0)$ 之间的测地线 ζ 不与 γ 相交．

(b) 任何满足 $\zeta(0)=p$，且 $\dot{\zeta}(0)$ 位于 $\dot{\zeta}_1(0)$ 与 $-\dot{\zeta}_2(0)$ 之间的测地线 ζ 必与 γ 相交(图 4.5)．

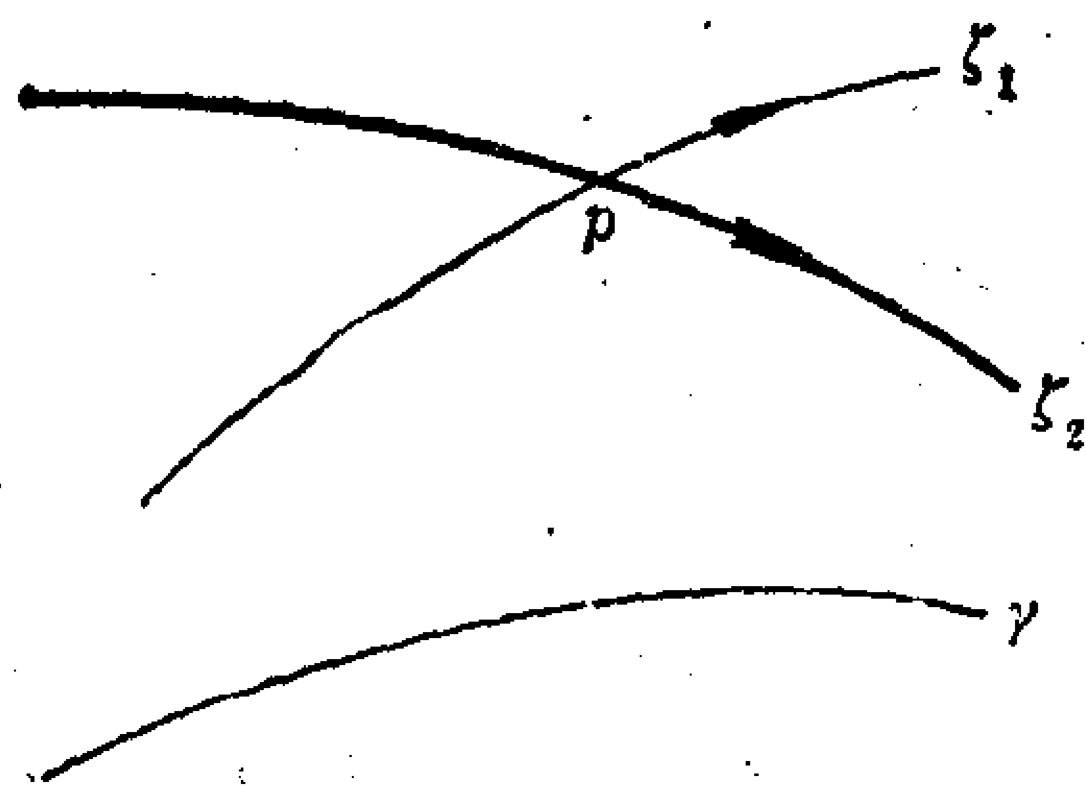


图 4.5

(在 D 上的 Poincaré 度量是 Lobachevsky-Bolyai-Gauss 的非欧几何的一个模型．题中(2)的断言正好就是他们所假设的公理．)

习题 6. 给定 $x\in S^2$ 及单位向量 $v_1, v_2\in S_x^2$，求作一条基点在 x 处的逐段 C^∞ 闭曲线，使得围绕这条闭曲线一周的平行移动把 v_1 变到 v_2．

§ 5 Jacobi 场和 Cartan-Hadamard 定理

本节参考文献

[H4], § 10.1 与 § 10.7.

[GKM], § 4.2.

在§ 4 中我们看到，如果 $\{\gamma_t\}$ 是单参数测地线族，它的横截向量场是 U，则 U 限制在基线 $\gamma\equiv\gamma_0$ 上是一个 Jacobi 场，即满足

$$\ddot{U}+R_{\dot{\gamma}U}\dot{\gamma}=0, \tag{5.1}$$

其中 $\ddot{U}=D_{\dot{\gamma}}D_{\dot{\gamma}}U$。本节我们讨论 Jacobi 场的基本性质，并用之来证明 Cartan-Hadamard 定理和§ 4 的定理 1。(出现在[S8, IV]中第 328 至 332 页，[M 1] § 19 或 [GKM] § 7.2 的 Cartan-Hadamard 定理的证明皆是不太必要地颇费匠心，想了解不同证法的应去查查。[KN, II] 中第 102 至 105 页的证明是太麻烦了。)

首先，我们想讲清楚(5.1)是一个二阶常微分方程组。选定一个沿 γ 的平行幺正标架场$\{e_1(t),\cdots,e_n(t)\}$使得 $e_1(t)=\dot{\gamma}(t)$, $\forall t$ (我们事先假定 γ 是正规测地线，以使此要求得到满足)。记

$$U(t)=\sum_i f^i(t)e_i(t),$$

$$R_{e_i(t)e_j(t)}e_k(t)\equiv\sum_l R^l_{ijk}(t)e_l(t),$$

其中 R 是曲率张量。于是由 $\langle e_i(t),e_j(t)\rangle=\delta_{ij}$ 可知(5.1)等价于

$$\ddot{f}^i(t)+\sum_j R^i_{1j1}(t)f^j(t)=0,\quad \forall i, \tag{5.2}$$

其中 $\ddot{f}^i = \dfrac{d^2 f^i}{dt^2}$. 由常微分方程组解的存在唯一性定理可得

引理 1 (1) 设 γ 是一条测地线，给定 $v, w \in M_{\gamma(0)}$，则存在唯一沿 γ 的 Jacobi 场使得 $U(0) = v$，$\dot{U}(0) = w$.

(2) 沿一条测地线的 Jacobi 场的零点是离散的，除非此 Jacobi 场恒为零.

证明 (1) 的证法直接取自常微分方程组解的存在唯一性定理. 至于(2)，用反证法. 如果零点集有聚点 $\gamma(t_0)$，那么 U 与 $\dot{U}$ 在 $\gamma(t_0)$ 处皆为零，再由(1)得 $U \equiv 0$.

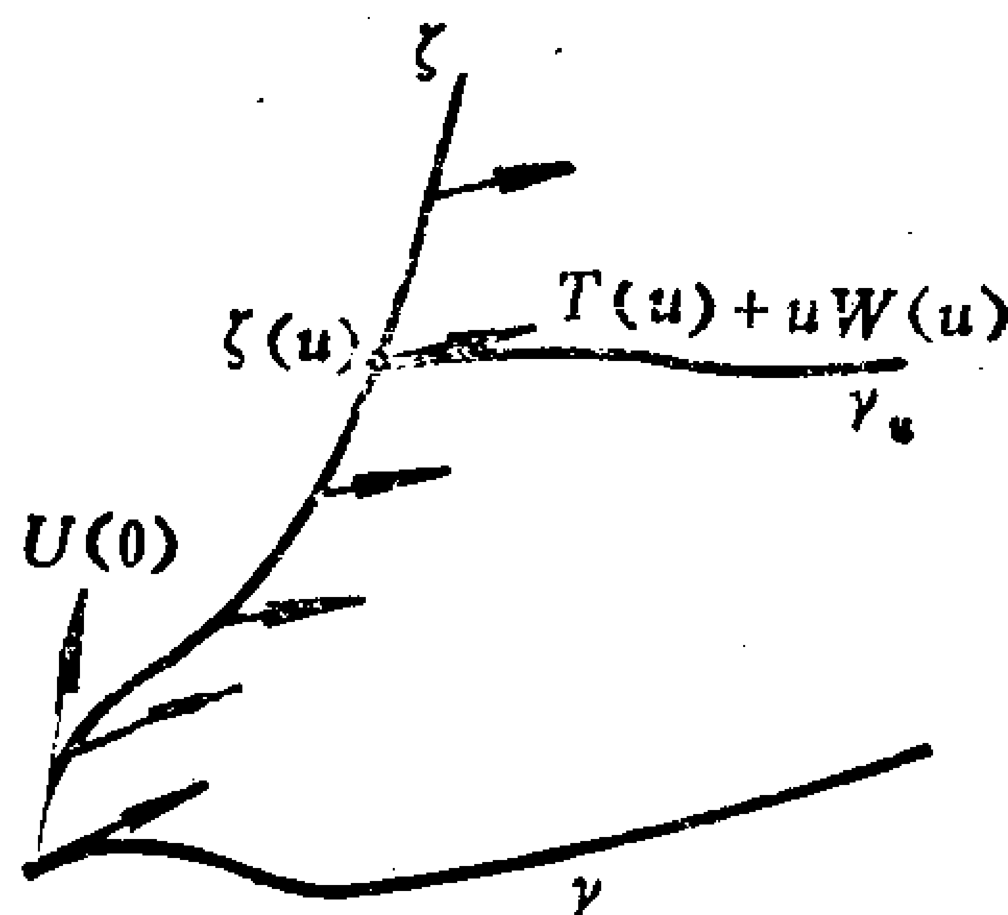


图 5.1

下列引理圆满地回答了§4中引理 7 的反回题.

引理 2 给定一条测地线 γ 及一个沿 γ 的向量场 U，那么 U 是 Jacobi 场当且仅当 U 是单参数测地线族 $\{\gamma_s\}$ 的横截向量场在 γ 上的限制，其中 $\gamma_0 \equiv \gamma$.

证明 充分性部分就是 § 4 的引理 7，现证必要性部分. 令 $v = U(0)$，$w = \dot{U}(0)$，又令 $\zeta:[0, \varepsilon] \to M$ 是一条测地线满足 $\dot{\zeta}(0) = v$，沿着 ζ 定义平行向量场 $T(u)$、$W(u)$，使得 $T(0) = \dot{\gamma}(0)$，$W(0) = w$ (见图 5.1). 对于任意 $u \in [0, \varepsilon]$ 令

$$\gamma_u(t) = \exp_{\zeta(u)} t(T(u) + uW(u)).$$

设 U_1 是 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场在 γ 上的限制，故它是 Jacobi 场. 由引理 1 只须验证 $U_1(0) = v$，$\dot{U}_1(0) = w$ 便证出引理 2. 显然

$$U_1(0) = \frac{\partial}{\partial u} \gamma_u(0)\bigg|_{u=0} = \frac{d}{du} \zeta(u)\bigg|_{u=0} = \dot{\zeta}(0) = v.$$

接着若记 $\Gamma(t, u) \equiv \gamma_u(t)$，那么 $T_1 \equiv d\Gamma\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$ 是 C^∞ 奇异长方形上的向量场 (见公式 (4.7) 处的讨论)，T_1 限制在 γ 上就是

γ，于是由 $[T_1, U_1]=0$，我们有

$$\dot U_1(0)=\mathrm{D}_{\dot\gamma(0)}U_1=\mathrm{D}_{U_1(0)}T_1=\mathrm{D}_v T_1=\mathrm{D}_{\dot\zeta(0)}T_1. \qquad (5.3)$$

现在来算

$$T_1(\zeta(u))=\frac{\partial}{\partial t}\exp_{\zeta(u)}t(T(u)+uW(u))\Big|_{t=0}$$

$$=T(u)+uW(u).$$

上式中第二个等号成立是因为 $\mathrm{dexp}_{\zeta(u)}: M_{\zeta(u)}\to M_{\zeta(u)}$ 是恒同映射所致．将计算结果代入(5.3)并考虑到 $T(u)$ 与 $W(u)$ 是沿 ζ 平行的，故有

$$\dot U_1(0)=\mathrm{D}_{\dot\zeta(0)}(T(u)+uW(u))=W(0)=w.$$

证毕．

引理 3 设 U 是沿测地线 γ 的一个 Jacobi 场，那么存在 $a, b\in\boldsymbol{R}$，使得

$$U=U^\perp+(at+b)\dot\gamma,$$

其中 $U^\perp$ 也是沿 γ 的 Jacobi 场并且 $\langle U^\perp, \dot\gamma\rangle=0$．

证明 易见

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle U, \dot\gamma\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\dot U, \dot\gamma\rangle=\langle\ddot U, \dot\gamma\rangle=\langle -R_{\dot\gamma U}\dot\gamma, \dot\gamma\rangle=0.$$

在上面计算过程中我们用到 $\ddot\gamma=0$（由于 γ 是测地线）及§ 2 中引理 1 的 (3)．因此 $\langle U, \dot\gamma\rangle(t)$ 是 t 的线性函数，比如说

$$\langle U, \dot\gamma\rangle(t)=a't+b',$$

其中 $a', b'\in\boldsymbol{R}$．令

$$a=\frac{a'}{|\dot\gamma|^2},\quad b=\frac{b'}{|\dot\gamma|^2},\quad U^\perp=U-(at+b)\dot\gamma,$$

于是 $\langle U^\perp, \dot\gamma\rangle=0$ 并且 $\ddot U^\perp=\ddot U=-R_{\dot\gamma U}\dot\gamma=-R_{\dot\gamma U^\perp}\dot\gamma$．证毕．

这个引理表明垂直于 $\dot\gamma$ 的 Jacobi 场才是有意思的．垂直于 $\dot\gamma$ 的 Jacobi 场被称为是**正常的 Jacobi 场**．

引理 4 如果U是一个沿测地线γ的 Jacobi 场，使得对某一对数 t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, $\langle U(t_1), \dot{\gamma}(t_1)\rangle = \langle U(t_2), \dot{\gamma}(t_2)\rangle = 0$, 则$U$是正常的 Jacobi 场.

证明 由引理 3, $\langle U(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = (at+b)|\dot{\gamma}|^2$, 它是 t 的线性函数. 由于它在 t_1, t_2 处为零，故必恒为零. 证毕.

现在我们已初步接触到 Jacobi 场的概念. 由于它在微分几何学中的重要性，有必要在认识它的时候，就对它做仔细的观察. 我们已经从两个不同的角度来了解 Jacobi 场了，其一是它满足 Jacobi 场方程 (5.1)，另一是它作为单参数测地线族的横截向量场在基线上的限制. 对第二种看法我们要多说几句. 回忆引理 2 的证明，我们事实上有

(A) 设 $\zeta:[0, \varepsilon] \to M: u \mapsto \zeta(u)$ 是M中一条曲线，$T(u)$, $W(u)$ 是 ζ 上平行的向量场，由

$$\gamma_u(t) = \exp_{\zeta(u)} t(T(u) + uW(u))$$

确定单参数测地线族 $\{\gamma_u\}$, 则 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场在 $\gamma_0(t)$ 上的限制 $U(t)$ 是 Jacobi 场，并且 $U(0) = \zeta(0)$, $\dot{U}(0) = W(0)$.

特别地，当 $\zeta(u) = x \in M$, $T, w \in M_x$ 时，我们有

(B) 设 $x \in M$, T, $w \in M_x$, $\{\gamma_u\}$ 由下式确定

$$\gamma_u(t) = \exp_x t(T + uW), \tag{5.4}$$

则 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场（在 $\gamma_0(t) = \exp_x tT$ 上的限制）$U(t)$ 是 Jacobi 场，并且 $U(0) = 0$, $\dot{U}(0) = w$.

由于 M_x 是内积空间，因此可以对 (B) 中的 T, w 加条件 $\langle T, w\rangle = 0$，这时将有

(C) 设 $x \in M$, T, $w \in M_x$ 并且 $\langle T, w\rangle = 0$. 令 $\{\gamma_u\}$ 由 (5.4)确定，则 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场（在 $\gamma_0(t) = \exp_x tT$ 上的限制）$U(t)$ 是正常的 Jacobi 场，并且 $U(0) = 0$, $\dot{U}(0) = w$.

(C) 的证明要仰赖于下列的引理 5（高斯引理），因此我们先来证明引理 5.

引理 5(高斯引理) 设 $x\in M, p\in M_x, X\in(M_x)_p=M_x$，如果在 M_x 的内积下 $p\perp X$，则 $d\exp_x X\perp\dot\gamma(1)$，其中 $\dot\gamma(1)$ 是曲线 $\gamma:[0,1]\to M: t\longmapsto \exp_x tp$ 的切向量。

(这引理其实是§3中引理5的另一种说法，不过在那里要限制在 B_δ 内，现在则无限制，但证法是相似的.)

证明 设 $\xi:[0,\varepsilon]\to M_x$ 是选取的一条曲线，使得 $\xi(0)=p$，$\dot\xi(0)=X$，并且 ξ 的象集落在半径为 $|p|$ 的球面上(因为 $p\perp X$，这样的 ξ 是存在的)。考虑 M 中 C^∞ 长方形

$$\Gamma:[0,1]\times[0,\varepsilon]\to M:(t,u)\longmapsto \exp_x t\xi(u),$$

令 $T=d\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$，$U=d\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$. 易见 $\gamma(t)=\Gamma(t,0),\dot\gamma(1)=T(\gamma(1)), d\exp_x X=U(\gamma(1))$. 因此欲证引理只须证 $\langle U,T\rangle=0$ 就够了. 由于 Γ 的每条 t 曲线皆是长度为 $|p|$ 的测地线，T 是它们的切向量，故 $\langle T,T\rangle\equiv|p|^2$ (与 t, u 无关!!).

$$\begin{aligned}
T\langle U,T\rangle &= \langle D_T U,T\rangle+\langle U,D_T T\rangle\\
&=\langle D_T U,T\rangle && (t\text{ 曲线是测地线})\\
&=\langle D_U T,T\rangle+\langle[T,U],T\rangle\\
&=\langle D_U T,T\rangle && ([T,U]=0)\\
&=\frac{1}{2}U\langle T,T\rangle\\
&=0. && (\langle T,T\rangle=\text{常数})
\end{aligned}$$

所以 $\langle U,T\rangle$ 沿着每条 t 曲线是常数. 当 $t\to 0$ 时，$U(t)\to 0$，从而 $\langle U,T\rangle\equiv 0$. 证毕.

现在我们用高斯引理来证(C)。其实只要证 $\langle U(t),\dot\gamma_0(t)\rangle=0,\forall t$. 考虑 M_x 中曲线 $\xi:[0,\varepsilon]\to M_x: u\longmapsto t(T+uw)$，易见 $d\exp_x\dot\xi(0)=U(t)$. 另外又考虑 M 中的曲线 $\gamma:[0,1]\to M:\tau\longmapsto \exp_x\tau(tT)$，易见 $\dot\gamma(1)=t\dot\gamma_0(t)$. 因此

$$\langle U(t),\dot\gamma_0(t)\rangle=\frac{1}{t}\langle d\exp_x\dot\xi(0),\dot\gamma(1)\rangle.$$

令 $p=tT$，$X=\dot{\xi}(0)$，在 M_x 中 $\langle p,X\rangle=\langle tT,\dot{\xi}(0)\rangle=\langle tT,tw\rangle=0$，所以由高斯引理得 $\langle d\exp_x\dot{\xi}(0),\dot{\gamma}(1)\rangle=0$，于是结论自明。

在以后的章节中，我们将看到：初值为零的正常 Jacobi 场广泛地出现在几何问题之中，对它的深入研究会导致许多重要的几何定理。

我们现在用 Jacobi 场来了解 $d\exp_x$。首先由 § 3 的引理 4，$\exp_x:M_x\to M$ 在半径方向总不退化(确切地讲，应说 $d\exp_x$)。因此考虑 $d\exp_x$ 在 $p\in M$ 处奇异时，只须考虑 $d\exp_x(X)$，其中 X 是 M_x 在 p 点处的任意切向量，它垂直于径向直线 $\tilde{\gamma}(t)=tp$ (即在 M_x 中 $X\perp p$)。令 $\gamma(t)=\exp_x\tilde{\gamma}(t)$，并以 $T=p$，$w=X$ 代入(5.4) 得到单参数测地线族 $\{\gamma_u\}$，它给出的横截向量场在 $\gamma(t)=\exp_x tp$ 上限制是 $U(t)$，则 $U(t)$ 是正常 Jacobi 场，$U(0)=0$，$\dot{U}(0)=w$，此外经过验证可知 $U(1)=d\exp_x(X)$。这使我们有

引理 6 $d\exp_x$ 在 $p\in M_x$ 处退化的充要条件是在 $\gamma(t)=\exp_x tp$ 上存在一个正常 Jacobi 场，它不恒为零但在 x 与 $\exp_x p$ 处为零。

假设 $d\exp_x$ 在 $p\in M_x$ 处退化，这时称 p 是映射 $\exp_x$ 的**共轭点**；称 $\exp_x p$ 是 x 沿着测地线 γ (或 γ 的线性再参数化)的**共轭点**。引理 6 告诉我们：沿着一条测地线某点是另一点的共轭点这一关系有对称性。

现在我们来讨论本书的第一个“整体性”定理。“**整体性**”一词的含义是：只须对流形的全貌做些拓扑、几何的假定之后，便能成立的性质。

定理 7 (Cartan-Hadamard) (1) 设 M 是一个完备的黎曼流形，它的截面曲率非正，那么对任意 $x\in M$，$\exp_x:M_x\to M$ 无共轭点；

(2) 如果M是单连通完备黎曼流形，并且在某点$x\in M$，$\exp_x$: $M_x\to M$ 无共轭点，那么 $\exp_x$ 是微分同胚。

注记。1898 年 Hadamard 证明了，一个完备单连通曲面，其高斯曲率非正，必具有这样的性质：对任意 $x\in M$，$\exp_x$: $M_x\to M$ 是微分同胚（当然那时是用M的测地线性态来叙述的）。1928 年 E. Cartan 将这结果推广到n维情形。所以这里的定理 7 实际上比他们证的稍多一点。值得注意，关于单连通的假设是要紧的，例如圆柱面 $C=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3: x^2+z^2=1,\ y\in \boldsymbol{R}\}$ 是完备的，曲率为零，但是 $\exp_x$: $C_x\to C$ 是一个非平凡的覆盖映射。一个映射 $\varphi: M\to M'$称为是一个**覆盖映射**，或M**均匀覆盖**着 M'，是指，对任意 $x'\in M'$，总可找到一个 x' 的邻域 U，使得 $\varphi^{-1}(U)=\bigcup_i W_i$，并且这里的 $\{W_i\}$ 有这样的性质：当 $i\neq j$ 时，$W_i\cap W_j=\varnothing$，又对任意 i，$\varphi: W_i\to U$ 是微分同胚。

定理 7 中关于M的完备性假设也是重要的。如果取 $M=\boldsymbol{R}^3-\{(0,0,0)\}$，并具有 $\boldsymbol{R}^3$ 的诱导度量，那么定理 7 的结论也不成立。定理 7 有一个重要特点，在它的第二部分中不仅断言M与M_x微分同胚，而且告知有一个确定的映射（即 $\exp_x$: $M_x\to M$）来实现微分同胚。为了把这点说透，看看另一个著名的定理（参阅[GM]），它说：一个非紧完备正截面曲率的黎曼流形必微分同胚于欧氏空间。在这个情形，人们可以造一个例子表明，对任意 $x\in M$，$\exp_x$: $M_x\to M$ 一般不是一个微分同胚。因此这定理虽断言M与 $\boldsymbol{R}^n$ 微分同胚，但微分同胚不再是由像 $\exp_x$ 那样明明白白的映射给出的。这就解释了在我们理解微分同胚的程度上有一种戏剧般的差异，存在于非正曲率单连通流形与正曲率非紧流形之间，尽管这两类流形的拓扑都是平凡的。

现时正处在相当仔细地研究非正曲率流形的时期。P.Eberlein 的最近一些文章 [E1]，[E2] 可作为进一步的参考。关于这种流

形上的函数论可参阅 [GW3].

我们先来看定理 7 的第一部分. 由引理 6 这相当于: 在定理 7 的假设下,任给一条测地线 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 与沿着 γ 的一个非平凡的正常 Jacobi 场 U, 只要 $U(0)=0$,则对任意 $t>0$, 有 $U(t)\neq 0$. 对此我们给出两个证明.

定理 7(1)的朴素证明 令 $f:[0,\infty)\to R$ 是由 $f(t)=\langle U(t), U(t)\rangle$ 定义的函数,我们断言: $\ddot f\geqslant 0$. 这是因为

$$\ddot f(t)=2(\langle\dot U,\dot U\rangle+\langle\ddot U,U\rangle)(t)$$
$$=2(\langle\dot U,\dot U\rangle-\langle R_{\dot\gamma U}\dot\gamma,U\rangle)(t)\geqslant 0.$$

这里已用到 $\langle R_{\dot\gamma U}\dot\gamma, U\rangle=K(\Pi)|\dot\gamma\wedge U|^2\leqslant 0$,其中 Π 是由$\{\dot\gamma(t), U(t)\}$ 张成的子空间, $K(\Pi)$ 是 Π 的截面曲率. 这就证明了断言. 假若定理 7(1) 不成立,由于 Jacobi 场的零点是离散的,故存在最小的 $t_0\neq 0$, 使 $f(t_0)=0$. 由于 $f(0)=0$, 在 $(0,t_0)$ 中 $\ddot f\geqslant 0$ 及 $f(t_0)=0$, 故 f 在端点达最大值,即有 $f\leqslant 0$. 于是 $U(t)$ 恒为零,这就导出矛盾. 证毕.

定理 7(1)的精密证明 令 $f:[0,\infty)\to R$ 由 $f(t)=|U(t)|$ 确定,类似上面的计算有

$$\ddot f(t)=\frac{-1}{|U(t)|^3}\langle U(t),\dot U(t)\rangle^2+\frac{1}{|U(t)|}\{|\dot U(t)|^2$$
$$-\langle R_{\dot\gamma U}\dot\gamma, U\rangle(t)\},$$

这式理解为在 $U(t)\neq 0$ 处成立. 在这种理解下,用 Schwartz 不等式

$$-\langle U(t),\dot U(t)\rangle^2\geqslant -|U(t)|^2\cdot|\dot U(t)|^2,$$

得

$$\frac{d^2}{dt^2}|U(t)|\geqslant -|U(t)|\cdot|\dot\gamma(t)|\cdot|K(t)|,\quad (5.5)$$

其中 $K(t)=K(\Pi(t))$. 特别地, 在非正截面曲率的假设下, 在 $U(t)\neq 0$ 处有 $\frac{d^2}{dt^2}|U(t)|\geqslant 0$. 接下去的证明就与第一个证明一

样了。

当然 (5.5) 比 $\frac{d^2}{dt^2}|U(t)| \geqslant 0$ 精确多了。虽然证明定理 7(1) 须要的只是 $\frac{d^2}{dt^2}|U(t)| \geqslant 0$，但是得到(5.5)的推理过程有一般意义，它给出下列习题的证明，这习题是 § 8 中讲的 Rauch **比较定理**的雏形。

习题 1. (1) 设 $\gamma:[0,b]\to M$ 是黎曼流形M中一条正规测地线，并且 γ 上无 $\gamma(0)$的共轭点；再设$U(t)$是一个沿着 γ 的正常 Jacobi 场使得 $U(0)=0$，$|\dot{U}(0)|=1$；又假定任意包含 $\dot{\gamma}$ 的平面之截面曲率不大于常数 β，那么

$$|U(t)| \geqslant \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sin \sqrt{\beta}\, t, & \text{如果 } \beta > 0, \\ t, & \text{如果 } \beta = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sinh \sqrt{-\beta}\, t, & \text{如果 } \beta < 0. \end{cases}$$

(2) 如果M是一个单连通完备的 2 维黎曼流形，它的高斯曲率 $\leqslant \beta$，设 $O \in M$，令 $c(r)$ 表以 r 为半径的测地圆周之周长（此测地圆周 $=\{x \in M: d(x,O)=r\}$，试证对任意 $r \geqslant 0$

$$c(r) \geqslant \begin{cases} 2\pi r, & \text{如果 } \beta = 0, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{-\beta}} \sinh \sqrt{-\beta}\, r, & \text{如果 } \beta < 0. \end{cases}$$

对于 $\beta > 0$ 的情形，试证 $\exp_O: M_O \to M$ 在 $B(\sqrt{1/\beta}\,\pi) \equiv \{X \in M_O: |X| \leqslant \pi/\sqrt{\beta}\}$ 上是微分同胚，并对任意$r < \pi/\sqrt{\beta}$，

$$c(r) \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \sin \sqrt{\beta}\, \pi.$$

定理 7(2) 的证明很容易从典型的覆盖空间论及下列引理 8 得到。

引理 8 设M是完备的黎曼流形，$x \in M$，$\exp_x: M_x \to M$ 无共

轭点，则$\exp_x$是覆盖映射.

证明 设g是M的黎曼度量，令$g' = \exp_x^* g$，它是将g拉到M_x上去的黎曼度量. 我们断言：g'是M_x上的完备度量. 为了证明此事，采用 I. M. Singer 的一个巧妙的观察. M_x中的射线是这样的$\tilde{\gamma}:[0,\infty) \to M_x$，使得存在某一单位向量$v \in M_x$，

$$\tilde{\gamma}(t) = tv, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

由$\exp_x$的定义可知，它将M_x中的射线映为M中出自x的测地线. 根据g'的定义，M_x中的射线就是g'的测地线，再利用 Hopf-Rinow 定理(§ 3 中定理 6)，g'是完备的.

记带有g'的M_x为(M_x, g')，于是我们已经知道$\exp_x$：$(M_x, g') \to (M, g)$是满的局部等距映射. 这时引理 8 就是下列引理 9 的推论了.

引理 9 设φ：$M \to M'$是黎曼流形间的局部等距映射，M是完备的，那么φ是覆盖映射并且M'也是完备的.

(引理中M的完备性假设是必要的. 如果放弃这个假设，即使补充假定M'是完备的，也不会有引理所述之结果. 有一个例子说明这点. R^2中一个开圆盘$\mathscr{D}$，包含映射$\varphi:\mathscr{D} \subset R^2$是局部等距的，$R^2$是完备的，可是$\mathscr{D}$不完备，$\varphi$也不是覆盖映射.

还要指出一点是，φ是满的这一条在假设中没有，而它却自然地蕴含在结论中.)

引理 9 的证明 先来证φ是满的. 由于φ是局部等距故$\varphi(M)$是M'中的开集. 又若y是$\varphi(M)$在M'中的极限点，那么必有$x \in M$使$\varphi(x)$与y之间有一条测地线来连接. 由M的完备性可知：这条测地线可提升为从x出发的测地线，它的终点的φ像自然是y. 从而$\varphi(M)$是M'中的闭集，$\varphi(M)$是M'的一个连通分支. 须知C^∞流形总假定是连通的，故$\varphi(M) = M'$.

在进一步论证之前，先作一个有趣的观察. 如果$\varphi:M \to M'$是一个局部等距，$\varphi(x) = x'$，则有下列交换图表

$$\begin{array}{ccc} M_x & \xrightarrow{d\varphi} & M'_{x'} \\ \Big\downarrow \exp_x & & \Big\downarrow \exp_{x'} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array} \tag{5.6}$$

(如果M, M'不假定是完备的,那么图表中的 M_x, $M'_{x'}$ 可分别用开子集 A, A' 代替，使得 $\exp_x, \exp_{x'}$ 分别在 A, A' 中有定义，$d\varphi(A) = A'$)。上述图表交换性的证明很容易,基于这样的事实:等距(局部的或整体的)映射将测地线映为测地线.

现在我们来证明: φ是一个覆盖映射，即 M' 被均匀地覆盖着. 现在选 δ 足够小使得 $\exp_{x'}: B'(\delta) \to B'_\delta$ 是微分同胚，其中 $B'(\delta) = \{v \in M'_{x'}: |v| < \delta\}$, $B'_\delta = \{y' \in M': d(y', x') < \delta\}$. 由于$\varphi$是局部同胚,故$\varphi^{-1}(x')$是离散点集,例如说$\varphi^{-1}(x') = \{x_i\}$. 对每一个 i, 令

$$B^i(\delta) \equiv \{v \in M_{x_i}: |v| < \delta\},$$
$$B^i_\delta \equiv \{y \in M: d(y, x_i) < \delta\}.$$

现在我们逐次证明下列三个断言:

(1) $\varphi^{-1}(B'_\delta) = \bigcup_i B^i_\delta$;

(2) 对任意 i, $\varphi: B^i_\delta \to B'_\delta$ 是微分同胚;

(3) 如果 $i \neq j$, 则 $B^i_\delta \cap B^j_\delta = \varnothing$.

$\bigcup_i B^i_\delta \subset \varphi^{-1}(B'_\delta)$ 是显然的. 反之若 $z \in \varphi^{-1}(B'_\delta)$, 于是在 B'_δ 中有唯一一条测地线 $\zeta: [0, 1] \to B'_\delta$ 使得 $\zeta(0) = \varphi(z)$, $\zeta(1) = x'$ (见§3定理2). 因为φ是一个局部等距映射，所以存在一条测地线 $\xi: [0, 1] \to M$ 使得

$$\varphi(\xi(t)) = \zeta(t), \quad \forall t.$$

因此 $\varphi(\xi(1)) = x$, 这样就有某 i, $\xi(1) = x_i$. 又 $L(\xi) = L(\zeta) < \delta$, 于是 $z = \xi(0) \in B^i_\delta$. 至此便证出 $\varphi^{-1}(B'_\delta) \subset \bigcup_i B^i_\delta$, 从

而(1)得证。

由于M的完备性，我们有交换图表

$$\begin{array}{ccc} B^i(\delta) & \xrightarrow{d\varphi} & B'(\delta) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_{x_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{x'}} \\ B^i_\delta & \xrightarrow{\varphi} & B'_\delta \end{array}$$

并且 $\exp_{x_i}$ 是满的. 另外易见 $d\varphi, \exp_{x'}$ 是微分同胚，于是

$$\varphi \circ \exp_{x_i} = \exp_{x'} \circ d\varphi$$

是微分同胚，故 $\exp_{x_i}$ 是浸入，从而 $\exp_{x_i}$ 是微分同胚. 因而

$$\varphi = \exp_{x'} \circ d\varphi \circ (\exp_{x_i})^{-1}$$

当然是微分同胚了，(2)便得证.

设有 i, j 使得 $i \neq j$, $B^i_\delta \cap B^j_\delta \neq \varnothing$. 取 $z \in B^i_\delta \cap B^j_\delta$, 因为(2), 在$B^i_\delta, B^j_\delta$ 中分别有唯一的正规测地线 ζ_i, ζ_j 连接 z 至 x_i, x_j. 令ζ是 B'_δ 中唯一的正规测地线连接 $\varphi(z)$ 至 x'. 由于φ: $B^i_\delta \to B'_\delta$ 和 $\varphi: B^j_\delta \to B'_\delta$ 是等距映射，故

$$\varphi(\zeta_i) = \zeta = \varphi(\zeta_j).$$

由于 $\varphi: M \to M'$ 是局部同胚，通过M中任意一点至多有一个ζ的提升. 既然 ζ_i, ζ_j 皆是 ζ 的提升，又都经过 z 点，于是 $\zeta_i = \zeta_j$, 特别 $x_i = \zeta_i(1) = \zeta_j(1) = x_j$, 这与 $i \neq j$ 矛盾.

习题 2. 和上引理 8 的证明对照，设 $\varphi: M \to M'$ 是满的局部等距映射，M' 是完备的，那么 M 必是完备的吗？为什么？

习题 3. 设 $\varphi: M \to M'$ 如习题 2 所述，那么φ必是一个覆盖映射吗？为什么？

现在我们再一次用 Jacobi 场来证明一个定理，它蕴含§4中定理 1.

定理 10 设 M, M' 是两个n维单连通的空间形式，其截面曲率是 c, 又设 $x \in M$, $x' \in M'$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ 分别是 $M_x, M'_{x'}$ 中的幺正基，那么存在唯一的**等距映射** $\varphi: M \to M'$, 使得

$$\varphi(x)=x',\quad \mathrm{d}\varphi(e_i)=e_i',\quad \forall e_i.$$

证明这个定理之前，先做些准备。

引理 11 设M是一个n维空间形式，其截面曲率为c，又设$x\in M$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是M_x中么正基，那么M的曲率张量满足

$$R_{e_ie_j}e_k=c(\delta_{ik}e_j-\delta_{jk}e_i),\quad 1\leqslant i,j,k\leqslant n.$$

证明 记$\tilde{R}_{e_ie_j}e_k=c(\delta_{ik}e_j-\delta_{jk}e_i)$，易见$\tilde{R}$是一个张量，满足§2引理1中的(1),(2),(3),(4)。又当$|v|=|w|=1$，$\langle v,w\rangle=0$时有$\langle\tilde{R}_{vw}v,w\rangle=c$，即$\tilde{R}$的"截面曲率"为$c$。由§2引理2即得$R=\tilde{R}$。

引理 12 记号与假设同引理11，设v是M_x中单位向量，令$v^\perp$是v的正交补，那么

$$R_{vw}v=\begin{cases}cw, & \text{如果 } w\in v^\perp,\\ 0, & \text{如果 } w=\alpha v\quad(\alpha\in\boldsymbol{R}).\end{cases}$$

(引理12可直接由引理11推得.)

定理 10 的证明 因§4(4.1)，故只须对$c=0,+1,-1$来证明定理。进而也可看出只须对$M=\boldsymbol{R}^n$，S^n或$\boldsymbol{H}^n$来证明定理10就行了，其中$\boldsymbol{H}^n$的定义见§4公式(4.2)。

首先讨论$c=0$或-1的情形。由 Cartan-Hadamard 定理，$\exp_x:M_x\to M$与$\exp_{x'}:M'_{x'}\to M'$皆是微分同胚。令$\Phi:M_x\to M'_{x'}$是内积空间的那个唯一等距变换使得

$$\Phi(e_i)=e_i',\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

现在定义$\varphi:M\to M'$为

$$\varphi=\exp_{x'}\circ\Phi\circ(\exp_x)^{-1}.$$

φ是一个微分同胚，我们要证明φ是一个等距映射，即对于M中在y点处的切向量X，我们要证明$|\mathrm{d}\varphi(X)|=|X|$。

由定理7可知，存在$T\in M_x$，$w\in(M_x)_T$使得

$$y=\exp_xT,\quad X=\mathrm{d}\exp_x(w).$$

在等同$(M_x)_T$与M_x之后，令$\gamma_u(t)=\exp_xt(T+uw)$，令$U(t)$

是 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场在 γ_0 上的限制. 由第89页的(B)可知 $U(t)$ 是沿着 γ_0 的 Jacobi 场并满足:

$$U(0)=0,\quad \dot{U}(0)=w,\quad U(1)=\mathrm{d}\exp_x(w)=X.$$

在 M' 中令 $\gamma'_u(t)=\exp_{x'}t(\Phi(T)+u\Phi(w))$, 令 $U'(t)$ 是 $\{\gamma'_u\}$ 的横截向量场在 γ'_0 上的限制. 同理 U' 是沿着 γ'_0 的 Jacobi 场并且 $U'(0)=0$, $\dot{U}'(0)=\Phi(w)$. 由于

$$\begin{aligned}\varphi\gamma_u(t)&=\exp_{x'}\circ\Phi\circ\exp_x^{-1}(\exp_x t(T+uw))\\&=\exp_{x'}\Phi(t(T+uw))\\&=\exp_{x'}t(\Phi(T)+u\Phi(w))=\gamma'_u(t),\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}\varphi(U(t))=U'(t)$,特别地 $\mathrm{d}\varphi(X)=\mathrm{d}\varphi(U(1))=U'(1)$. 因此我们只须证明 $|U(1)|=|U'(1)|$.

分别沿着测地线 γ_0,γ'_0 取幺正平移标架场 $\{e_1(t),\cdots,e_n(t)\}$, $\{e'_1(t),\cdots,e'_n(t)\}$ 使得

$$e_i(0)=e_i,\quad e'_i(0)=e'_i,\quad \forall i.$$

记

$$U(t)=\sum_i f_i(t)e_i(t),\quad U'(t)=\sum_i f'_i(t)e'_i(t).$$

令

$$V_0(t)=\frac{\dot{\gamma}_0(t)}{|\dot{\gamma}_0(t)|}.$$

因为引理12故有

$$\begin{aligned}R_{\dot{\gamma}_0(t)U(t)}\dot{\gamma}_0(t)&=|\dot{\gamma}_0(t)|^2\{R_{V_0(t)U(t)}V_0(t)\}\\&=|\dot{\gamma}_0(t)|^2\left\{c\left(U(t)-\frac{\langle U(t),\dot{\gamma}_0(t)\rangle}{|\dot{\gamma}_0(t)|^2}\dot{\gamma}_0(t)\right)\right\}.\end{aligned}$$

由于 $\langle\dot{\gamma}_0(t),\dot{\gamma}_0(t)\rangle=\langle\dot{\gamma}_0(0),\dot{\gamma}_0(0)\rangle=\langle T,T\rangle$, $\langle\dot{\gamma}_0(t),e_i(t)\rangle=\langle T,e_i\rangle$,于是

$$\ddot{U}(t)+R_{\dot{\gamma}_0(t)U(t)}\dot{\gamma}_0(t)=0$$

就相当于

$$\ddot{f}_i(t) + \sum_j f_j(t)\{c|T|^2\delta_{ij} - c\langle T, e_i\rangle\langle T, e_j\rangle\} = 0, \quad \forall i.$$

此外由 $U(0)=0$，$\dot{U}(0)=w$ 可知 $\{f_i\}$ 满足下列微分方程

$$\begin{cases} \ddot{f}_i + \sum_j f_j\{c|T|^2\delta_{ij} - c\langle T, e_i\rangle\langle T, e_j\rangle\} = 0, \\ f_i(0) = 0, \\ \dot{f}_i(0) = \langle w, e_i\rangle, \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n$. 同理可得

$$\begin{cases} \ddot{f}'_i + \sum_j f'_j\{c|\Phi(T)|^2\delta_{ij} - c\langle \Phi(T), e'_i\rangle\langle \Phi(T), e'_j\rangle\} = 0, \\ f'_i(0) = 0, \\ \dot{f}'_i(0) = \langle \Phi(w), e'_i\rangle. \end{cases}$$

注意到 $|T|^2 = |\Phi(T)|^2$, $\langle T, e_i\rangle = \langle \Phi(T), \Phi(e_i)\rangle = \langle \Phi(T), e'_i\rangle$ 和 $\langle w, e_i\rangle = \langle \Phi(w), \Phi(e_i)\rangle = \langle \Phi(w), e'_i\rangle$，故由微分方程解的唯一性得 $f_i(t) = f'_i(t)$，$\forall i, \forall t$. 所以

$$|U(1)|^2 = \sum_i (f_i(1))^2 = \sum_i (f'_i(1))^2 = |U'(1)|^2,$$

这就证明了当 $c=0$ 或 -1 时的定理 10.

至于 $c=+1$ 时的情形，不妨假设 $M=S^n$. §4 中关于 S^n 上测地线的讨论使我们看到，如果 $\bar{x}$ 是 $x\in S^n$ 的**对径点**（即 $\bar{x} = -x$），则 $\exp_x^{-1}: S^n - \{\bar{x}\} \to S^n_x$ 是确切定义的 C^∞ 映射，因此我们可用与前面类似的公式 $\varphi = \exp_{x'}\circ\Phi\circ\exp_x^{-1}$ 来定义 φ: $S^n - \{\bar{x}\} \to M'$. 在 $c=0$ 或 -1 时的讨论可以逐字搬过来，从而证得：φ 是一个局部等距映射（未必是一个整体等距，因为在 Φ 的像集上 $\exp_{x'}$ 是不是微分同胚，我们还不清楚）. 我们用下面一个办法将 φ 扩充到整个 S^n 上. 取 $z \in S^n - \{x, \bar{x}\}$，令 $\bar{z} = -z$，$z' = \varphi(z)$. 因 φ 是局部等距故有交换图表

$$\begin{array}{ccc} S^n_{\bar z} & \xrightarrow{d\varphi} & M'_{z'} \\ \uparrow \exp_{\bar z}^{-1} & & \downarrow \exp_{z'} \\ S^n - \{\bar x, \bar z\} & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

记 $d\varphi: S^n_{\bar z} \to M'_{z'}$ 为 Ψ. 用 $\phi = \exp_{z'} \circ \Psi \circ \exp_{\bar z}^{-1}$ 定义 ϕ: $S^n - \{\bar z\} \to M'$. 用与上面相同的推理可知ϕ是一个局部等距映射. 在 $S^n - \{\bar x, \bar z\}$ 上

$$\varphi = \exp_{z'} \circ d\varphi \circ \exp_{\bar z}^{-1} = \exp_{z'} \circ \Psi \circ \exp_{\bar z}^{-1} = \phi,$$

因此令 $\varphi(\bar x) = \phi(\bar x)$ 便将φ扩张到整个 S^n 上，所得映射 φ: $S^n \to M'$ 是 C^∞ 且局部等距的. 由引理 9 可知φ是一个覆盖映射，再由 M' 的单连通性即知φ是一个整体等距. 此外我们由φ的定义可知 $d\varphi(e_i) = e'_i$, 这就证明了定理10的存在性部分. 下面引理 13 表明：这里的φ是唯一的.

引理 13 设 $\varphi_1, \varphi_2: M \to N$ 是黎曼流形间的两个局部等距，使得对某个 $x \in M$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = y \in N$, 并且 $d\varphi_1(x) = d\varphi_2(x): M_x \to N_y$, 那么 $\varphi_1 = \varphi_2$, 其中 $d\varphi_1(x)$ 表示 $d\varphi_1$ 在 M_x 上的限制.

证明 定义M的一个子集

$$\mathscr{S} = \{y \in M: \varphi_1(y) = \varphi_2(y) \text{且} \ d\varphi_1(y) = d\varphi_2(y)\}.$$

由假设知 $x \in \mathscr{S}$, 故 $\mathscr{S}$ 非空. 如果 $y \in \mathscr{S}$, 则存在 $\delta > 0$ 使得 $\exp_y$: $B(\delta) \to M$ 是微分同胚入内，其中 $B(\delta) = \{X \in M_y: |X| < \delta\}$. 由(5.6)图表的交换性可知 $\exp_y(B(\delta)) \subset \mathscr{S}$, 从而 $\mathscr{S}$ 是开集. 由连续性讨论可知 $\mathscr{S}$ 是闭集. 再由M的连通性最后得 $\mathscr{S} = M$. 证毕.

定理 10 有一些值得注意的推论. 首先当 $M = M'$ 时，定理 10 直接推出

推论 14 设M是一个 n 维完备单连通黎曼流形，则M是空间形式当且仅当对任意 x, $x' \in M$ 和 M_x, $M_{x'}$ 中任意幺正标架

$\{e_1, \cdots, e_n\}, \{e'_1, \cdots, e'_n\}$，存在一个等距映射 $\varphi: M \to M$ 使得

$$\varphi(x) = x', \quad d\varphi(e_i) = e'_i, \quad \forall i.$$

这个推论表明，任何单连通空间形式必是一个齐性黎曼流形。特别常曲率为 -1 的流形 H^n（§4中定义的）是齐性的。如果从公式（4.2）写出的双曲度量来看，这样的事远不那么显然。定理10也推出这些空间形式是**两点齐性的**，所谓 M 是两点齐性的是指，对任意 $p_1, p_2, q_1, q_2 \in M$，$d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$，则存在一个等距映射 $\varphi: M \to M$ 使得 $\varphi(p_1) = q_1$，$\varphi(p_2) = q_2$。

推论 15 所有单连通空间形式是两点齐性的。

证明 设 p_1, p_2, q_1, q_2 是单连通空间形式 M 中的点，$d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2) = \alpha$。令 $\zeta, \xi: [0, \alpha] \to M$ 是正规测地线，使得

$$\zeta(0) = p_1, \ \zeta(\alpha) = p_2, \ \xi(0) = q_1, \ \xi(\alpha) = q_2$$

（关于 ζ, ξ 的存在性请见§3中推论7）。分别在 M_{p_1}, M_{q_1} 中选么正标架 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，$\{e'_1, \cdots, e'_n\}$ 使得 $e_1 = \dot{\zeta}(0), e'_1 = \dot{\xi}(0)$，那么定理10给出一个等距映射 $\varphi: M \to M$ 满足 $d\varphi(e_i) = e'_i$。由此显见 $\varphi(p_i) = q_i$，$i = 1, 2$。证毕。

别忘了定理10蕴含§4中定理1的唯一性部分（存在性部分当时已经证了），于是§4中那定理现在证全了。

最后给些说明，告知关于李群的一些事。假设 M 是一个 n 维黎曼流形，经典的 Myers-Steenrod **定理**说：M 的等距群 $\mathscr{T}(M)$ 是一个李群（不一定连通）（参阅 [KN, I] 第239页）。$\mathscr{T}(M)$ 的维数量度流形对称性的大小。在一般情形下，我们料想 $\mathscr{T}(M) =$ {恒同映射}。另一方面

$$\dim \mathscr{T}(M) \leqslant n + \left(\frac{n^2 - n}{2}\right) = \frac{1}{2}(n^2 + n).$$

把 $\dim \mathscr{T}(M)$ 的上界写成这个和的原因现在看来是显然的，可这么来看：令 $F(M)$ 是 M 的**么正标架丛**，即 $F(M) = \{(x, \{e_1, \cdots, e_n\}): x \in M, \{e_i\}$ 是 M_x 的么正标架$\}$。固定 $(x_0, \{e_1, \cdots, e_n\}) \in F(M)$，对任意 $\phi \in \mathscr{T}(M)$，令 $\rho(\phi) = (\phi(x_0), \{d\phi(e_1), \cdots,$

$d\phi(e_n)\})$，这就定义一个映射 $\rho:\mathscr{T}(M)\to F(M)$. 可以证明 ρ 是 C^∞ 非奇异的并且 $\rho(\mathscr{T}(M))$ 是 $F(M)$ 的闭集. 由引理 13 立得：ρ 是一个嵌入，因此 $\rho(\mathscr{T}(M))$ 是 $F(M)$ 的一个闭子流形，而 $F(M)$ 的维数恰是 $n+\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$，这就给出了上界. 如果 M 是单连通的，推论 14 指出：这个上界能达到当且仅当 M 是空间形式. 当不假定单连通性，那么结论中一定包含实投影空间(参阅[K7]第 46 页).

自然地想来：对任意整数 k，$0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}(n^2+n)$，存在一个 n 维黎曼流形 M 使得 $\dim\mathscr{T}(M)=k$. 但是关于 $\dim\mathscr{T}(M)$ 有一个著名的**间隙现象**，否定了这种设想. 那是说，如果 $n\neq 4$，又如果 $\frac{1}{2}n(n-1)+1<k<\frac{1}{2}(n^2+n)$，则无这样的流形. 进而若 $n>4$，满足条件 $\dim\mathscr{T}(M)=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 的流形 M 能完全地分类(参阅[K7]第 II 章 § 3).

习题 4 在一个常截面曲率的流形(不必是完备的或单连通的)上，每一个沿测地线 $\gamma:[0,b]\to M$ 的正常 Jacobi 场 $U(t)$，当其初值 $U(0)$ 为零时，试证它是"**几乎平行的**"，其含义是：存在一个沿 γ 的单位平行向量场 $W(t)$ 使得 $U(t)=f(t)W(t)$，其中 f 是 $[0,b]$ 上某个 C^∞ 函数.

习题 5(习题 4 之逆). (1) 设 M 是一个黎曼流形，$x\in M$，又假设沿着从 x 出发的测地线上所有正常 Jacobi 场都是"几乎可平行的". 令 $\tilde{S}$ 是 M_x 的一个向量子空间，在 x 的一个小邻域内令 $S=\exp_x\tilde{S}$. 试证：对于任意测地线 $\gamma:[0,b]\to M$ 使得 $\dot{\gamma}(0)\in\tilde{S}$，并且 $\gamma([0,b])\subset S$，则沿着 γ 将 $\tilde{S}$ 平移到 $\gamma(b)$ 处的切空间 $S_{\gamma(b)}$.

(2) 假设与(1)同，试证：M_x 中所有平面的截面曲率是常数. (可以先证 $\langle R_{XY}X,Z\rangle=0$，其中 X,Y,Z 是 M_x 中彼此正交的向量.)

把习题 5 称为习题 4 之逆，其原因在于：如果(1)中假设对所有 $x\in M$ 皆成立，那么用 Schur 定理(见本书第 84 页)可知 M 的截面曲率是常数. 习题 4 之逆的取得主要归功于 E. Cartan.

§6 第一与第二变分公式及其初步的应用

本节参考文献

[GKM]，§§4.1，7.4，7.5，5.2.

[CE]，第4页至第7页，第20页至第22页，第98页至第100页.

[GW3]，§§1—2.

([M1]，§§11—13提供了另一种途径，但其中某些内容与这里处理的办法是类似的.)

本节所考虑的问题是：给定一条曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 后，如何去确定在连接 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(b)$ 的所有曲线之中 γ 是否具有最小的长度？一般情形下这个整体问题是没有解的．但如果我们限于在 γ **邻近的**那些曲线中去考虑，则微积分将提供如下的回答．把 γ 嵌入到一个单参数曲线族 $\{\gamma_u\}_{0\le u\le\varepsilon}$ 中去，使得 $\gamma=\gamma_0$，且

$$\gamma_u(a)=\gamma(a),\quad \gamma_u(b)=\gamma(b),\quad \forall u\in[0,\varepsilon],$$

并验证由 $L(u)=(\gamma_u$ 的长度)所定义的函数 $L:[0,\varepsilon]\to\boldsymbol{R}$ 在0处是否具有局部极小值．如 $L'(0)=0$ 及 $L''(0)>0$ ("$'$"表示对 u 的导数)，则 L 在 $u=0$ 处有局部极小值．如果对所有这样的单参数族 $\{\gamma_u\}$，总有 $L'(0)=0$ 及 $L''(0)>0$，于是这条曲线 γ 和邻近于 γ 的所有其他曲线相比较，γ 的长度为极小．

为此，我们必须利用 M 上的几何数据来推导 $L'(0)$ 及 $L''(0)$ 的详尽的计算公式，然后我们将给出这些公式的某些简单的应用．在这些应用中较实质的是 Synge **定理**(定理7)及非正曲率流形中距离函数的整体**凸性**(定理3).

考虑一个 C^∞ 长方形映射 $[a, b]\times[0, \varepsilon]\to M$，使得

$$(t, u)\longmapsto\gamma_u(t),$$

这个单参数曲线族 $\{\gamma_u\}$ 的**基曲线** γ_0 为给定的曲线 γ，与前相仿，设 $L(u)=L(\gamma_u)$。注意：为了今后方便起见，我们一开始先不假设

$$\gamma_u(a)=\gamma(a)\ \text{及}\ \gamma_u(b)=\gamma(b),\quad \forall u.$$

令 U 是 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场，而 T 是切于所有曲线 γ_u 的向量场，并记住 §1 末关于映射上的向量场及诱导联络的讨论。 我们现在开始对 $L'(0)$ 及 $L''(0)$ 进行计算．为了方便起见，不妨假设 t 是基曲线 γ 的弧长参数，所以 $|\dot\gamma|=1$。

由

$$L(u)=\int_a^b|\dot\gamma_u(t)|\mathrm{d}t$$

知

$$L'(u)=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{\langle\dot\gamma_u(t),\dot\gamma_u(t)\rangle}.$$

但被积项为

$$U\sqrt{\langle T,T\rangle}=\frac{1}{|T|}\langle T,\mathrm{D}_UT\rangle=\frac{1}{|T|}\langle T,\ \mathrm{D}_TU\rangle,$$

这里利用了 $[T, U]=0$．于是

$$L'(u)=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\ \mathrm{D}_TU\rangle|_{(t,u)}\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

特别对 $u=0$，我们有

$$\frac{1}{|T|}\langle T,\mathrm{D}_TU\rangle|_{(t,0)}=\frac{1}{|\dot\gamma|}\{T\langle T,\ U\rangle-\langle\mathrm{D}_TT,U\rangle\}|_{(t,0)}$$

$$=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\dot\gamma,\ U\rangle-\langle\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma,\ U\rangle\right\}\Big|_{(t,0)}.$$

如通常那样，用 $\ddot\gamma$ 表示 $\mathrm{D}_{\dot\gamma}\dot\gamma$，我们得到**弧长的第一变分公式**

$$L'(0)=\langle\dot\gamma(t),\ U(t)\rangle|_a^b-\int_a^b\langle\ddot\gamma(t),U(t)\rangle, \tag{6.2}$$

其中 $U(t)$ 代表 $U(\gamma(t))$. 注意: 我们在这里并没有假设

$$\gamma_u(a)=\gamma(a), \quad \gamma_u(b)=\gamma(b), \quad \forall u.$$

现在我们来给出这个公式的两个显而易见的应用.

第一个应用是测地线的一个整体的特征. 回忆 §3 中的引理 3 把测地线特征为**局部**长度为最短的曲线,但从整体上看,测地线一般不一定是长度最短的.

引理 1 曲线 $\gamma:[a, b]\to M$ 是测地线的充要条件为: 它是长度函数关于所有**正常变分** $\{\gamma_s\}$ (即所有 s, $\gamma_s(a)=\gamma(a)$ 及 $\gamma_s(b)=\gamma(b)$, 且 $\gamma=\gamma_0$) 的一个临界点.

证明 对正常变分, $U(a)=U(b)=0$, 于是 $L'(0)=0$ 等价于

$$\int_a^b \langle\ddot{\gamma}, U\rangle dt=0, \ \forall \text{沿} \gamma \text{的向量场} U.$$

这等价于对所有沿 γ 的向量场 U,在 $[a,b]$ 上成立 $\langle\ddot{\gamma}, U\rangle\equiv 0$, 这相当于 $\ddot{\gamma}\equiv 0$,即 γ 是一条测地线. 证毕.

对于第二个应用,设 N 为 M 中的一个闭子流形,且设 $x\notin N$, 则从度量空间理论知道,存在 $y\in N$,使得

$$d(x, y)=d(x, N)\equiv \inf\{d(x, z): z\in N\}.$$

设 $\gamma:[a, b]\to M$ 为连接 x 到 y 的一条最短的测地线.

引理 2 $\gamma\perp N$ (即 $\dot{\gamma}(b)\perp N_y$).

证明 设 $Y\in N_y$, 只需证明 $\langle\dot{\gamma}(b), Y\rangle=0$. 设 $\xi:[0,\varepsilon]\to N$ 使得 $\dot{\xi}(0)=Y$, 设$\{\gamma_u\}$为任何一个单参数曲线族,其中 $\gamma_0=\gamma$ 而且每一条 γ_u 连接 x 到 $\xi(u)$, $\forall u\in[0, \varepsilon]$. 注意: 这个单参数曲线族的横截向量场 U 必须满足 $U(a)=0$. 进而,因为 γ 是测地线,所以 $\ddot{\gamma}=0$. 于是由 (6.2) 得到

$$L'(0)=\frac{1}{c_0}\langle\dot{\gamma}(b), Y\rangle \quad (c_0=|\dot{\gamma}|).$$

但 γ 是连接 x 到 $y\in N$ 的最短的测地线, 所以 $L'(0)=0$, 故证

得 $\langle\dot{\gamma}(b), Y\rangle = 0$. 证毕.

现在我们对 $L''(0)$ 进行计算. 由本节一开始的注记想见仅当 $L'(\theta) = 0$ 时, $L''(0)$ 的计算才有意义,于是我们可假设这时 $\gamma \equiv \gamma_0$ 是一条正规测地线. 由(6.1)得到

$$L''(u) = \int_a^b \frac{d}{du}\left(\frac{1}{|T|}\langle T, D_T U\rangle\right) dt, \tag{6.3}$$

其中被积项为

$$\begin{aligned} U&\left(\frac{1}{|T|}\langle T, D_T U\rangle\right) \\ &= -\frac{1}{|T|^3}\langle T, D_T U\rangle^2 + \frac{1}{|T|}\langle D_T U, D_T U\rangle \\ &\quad + \frac{1}{|T|}\langle T, D_U D_T U\rangle \\ &= \frac{-1}{|T|^3}\{T\langle T, U\rangle - \langle D_T T, U\rangle\}^2 + \frac{1}{|T|}|D_T U|^2 \\ &\quad + \frac{1}{|T|}\{-\langle T, R_{UT} U\rangle + \langle D_T D_U U, T\rangle\}, \end{aligned}$$

在最后一个括号中, 我们又一次利用了 $[T, U] = 0$. 把它代入 (6.3) 中去,再令 $u = 0$,并注意在 $u = 0$ 时有

$$D_T T = D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0, \quad |T| = |\dot{\gamma}| = 1$$

及

$$\langle D_T D_U U, T\rangle = \frac{d}{dt}\langle D_U U, T\rangle,$$

并对 $[a, b]$ 上的任何函数,用 f' 代替 $\frac{df}{dt}$,用 $\dot{U}$ 代替 $D_{\dot{\gamma}}U$, 最后我们得到

$$\begin{aligned} L''(0) = \int_a^b (&|\dot{U}(t)|^2 - \langle\dot{\gamma}, R_{U\dot{\gamma}}U\rangle(t) - [\langle\dot{\gamma}(t), U(t)\rangle']^2 \\ &+ \langle D_U U, \dot{\gamma}\rangle'(t))dt, \end{aligned}$$

即

$$L''(0)=\langle \mathrm{D}_U U,\ \dot\gamma\rangle\Big|_{t=a}^{t=b}+\int_a^b\{|\dot U(t)|^2-\langle R_{\dot\gamma U}\dot\gamma, U\rangle$$
$$-(\langle\dot\gamma, U\rangle')^2\}\mathrm{d}t \qquad (6.4)$$

(6.4) **是弧长的第二变分公式**. 这里有决定性的项是涉及曲率的项. 有时我们把 $\langle \mathrm{D}_U U,\ \dot\gamma\rangle|_a^b$ 称为**边界项**. 如 $\{\gamma_u\}$ 是一个正常变分,则**端点曲线** $u\longmapsto\gamma_u(a)$ 及 $u\longmapsto\gamma_u(b)$ 是常值的,所以没有边界项.

如果我们把注意力限制于正常变分(见引理 1), 则 $U(t)$ 沿 $\dot\gamma$ 的切向分量对 γ 仅起了重新参数化的作用, 它并不改变 γ 的长度, 因而对长度变分是没有贡献的. 于是只需要考虑变分的正交分量 $U^\perp(t)$, 即可设 $\langle U^\perp,\ \dot\gamma\rangle=0$,记

$$U(t)\equiv U^\perp(t)+f(t)\dot\gamma(t),$$

这里 $\langle U^\perp(t),\ \dot\gamma(t)\rangle=0$, $\forall t$, 而且 f 是 $[a,\ b]$ 上的一个 C^∞函数, 于是

$$|\dot U(t)|^2-(\langle\dot\gamma(t),\ U(t)\rangle')^2=|\dot U^\perp(t)|^2+f'(t)^2-f'(t)^2$$
$$=|\dot U^\perp(t)|^2.$$

再利用曲率张量的反称性,得出

$$\langle R_{\dot\gamma U}\dot\gamma,\ U\rangle=\langle R_{\dot\gamma U^\perp}\dot\gamma,\ U^\perp\rangle.$$

于是 (6.4) 等价于

$$L''(0)=\langle \mathrm{D}_{U(t)}U(t),\ \dot\gamma(t)\rangle|_a^b+\int_a^b\{|\dot U^\perp(t)|^2$$
$$-\langle R_{\dot\gamma(t)U^\perp(t)}\dot\gamma(t),\ U^\perp(t)\rangle\}\mathrm{d}t. \qquad (6.5)$$

作为第一个推论,我们要证明

定理 3 设M是一个具有非正截面曲率的完备单连通黎曼流形. 固定一点 $O\in M$, 且定义 $\rho:M\to[0,\infty)$ 为 $\rho(x)=d(x,O)$. 则 ρ^2 在M上是 C^∞ 的,且 $\mathrm{D}^2\rho^2$ 在M上为正定.

注记. 我们称 ρ 为(**相对于 O 的)距离函数**,并用记号 $\mathrm{D}^2\rho^2>0$ 表示 Hessian $\mathrm{D}^2\rho^2$ 的正定性. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中, 如取 O 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的原点时,简单的计算可表明: $\mathrm{D}^2\rho^2(X,\ X)=2|X|^2$. 于是定理 3 是

$\boldsymbol{R}^n$ 中这个明显事实的一种推广．

证明 由 $\exp_O$ 的定义及 Cartan-Hadamard 定理，$\rho^2(x)=|\exp_O^{-1}(x)|^2$，于是 ρ^2 在M上是 C^∞ 的．现在设 $x\neq 0$，且设 $v\in M_x$，我们将证明：如 $v\neq 0$，则有 $D^2\rho^2(v,v)>0$．设 $\zeta:[0,\varepsilon]\to M$ 为一条使得 $\dot\zeta(0)=v$ 的测地线．对每一 $u\in[0,\varepsilon]$，设 $\gamma_u:[0,r]\to M$ 为连接 O 到 $\zeta(u)$ 的测地线(图 6.1)，这里 $r=\rho(x)$．如通常那样，记 $\gamma=\gamma_0$，且注意到，因为 γ 定义在 $[0,r]$ 上，γ 是一条正规测地线．对这个单参数曲线族而言，末端曲线(即常值曲线 O 和曲线 ζ)是测地线，因此(6.5)的边界项为零．于是

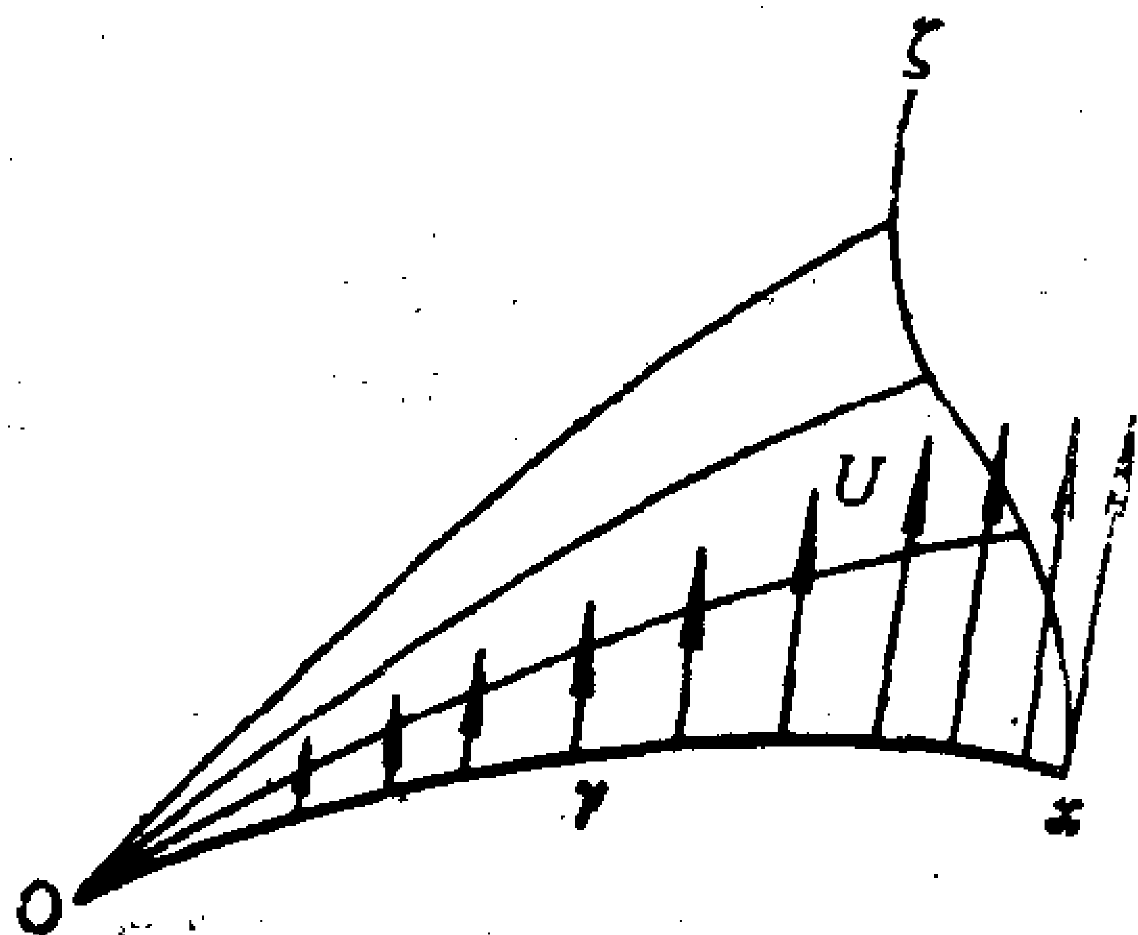


图 6.1

$$L''(0)=\int_0^r\{|U^\perp(t)|^2-\langle R_{\dot\gamma(t)U^\perp(t)}\dot\gamma(t),\ U^\perp(t)\rangle\}dt$$

$$\geqslant\int_0^r|U^\perp(t)|^2dt, \tag{6.6}$$

这里用到了截面曲率 $\leqslant 0$ 的性质．现在

$$D^2\rho^2(v,v)=\dot\zeta\dot\zeta\rho^2|_{u=0}-(D_{\dot\zeta(0)}\dot\zeta)\rho^2 \qquad (\text{见 §2 的(2.5)})$$

$$=\frac{d^2}{du^2}\rho^2(\zeta(u))|_{u=0} \qquad (\text{因为 }\zeta\text{ 是测地线})$$

$$=2r\frac{d^2}{du^2}\rho(\zeta(u))|_{u=0}+2\left(\frac{d}{du}\rho(\zeta(u))^2\Big|_{u=0}\right)$$

$$=2rL''(0)+2\{L'(0)\}^2,$$

这是因为由 Cartan-Hadamard 定理，$L(\gamma_u)=d(0,\zeta(u))\equiv\rho(\zeta(u))$．于是由(6.6)及(6.2)得到

$$D^2\rho^2(v,v)\geqslant 2r\int_0^r|U^\perp(t)|^2dt+2\langle v,\dot\gamma(t)\rangle^2.$$

假设 $\langle v, \dot{\gamma}(t)\rangle = 0$，因为 $U(r) = v$，于是由 §5 的引理 4，U 是一个正常的 Jacobi 场。因为 $U(r) = v \neq 0$，所以 U 是非平凡的，于是 $\dot{U}^{\perp} = \dot{U}$。而且 $\dot{U}$ 不恒同于 0，因为如 U 是平行的，则由 $U(0) = 0$ 可推出 $U \equiv 0$ 而与 U 的非平凡性矛盾。于是得到

$$\int_0^r |\dot{U}^{\perp}|^2 > 0 \text{ 及 } D^2\rho^2(v, v) > 0,$$

如 $\langle v, \dot{\gamma}(r)\rangle \neq 0$，则当然有 $D^2\rho^2(v,v) \geqslant 2\langle v, \dot{\gamma}(r)\rangle^2 > 0$，因而我们已证明了在 $M - \{O\}$ 上有 $D^2\rho^2 > 0$。证毕。

$D^2\rho^2$ 在 M_O 上为正定一事与曲率无关。这一点在下面的引理中将被证明。

引理 4 设 M 是一个任意的黎曼流形，令 $O \in M$，且设 ρ: $M \to \boldsymbol{R}$ 是相对于 O 点的距离，则 ρ^2 在 O 的一个邻域 $\mathscr{U}_O$ 中为 C^∞，且在 $\mathscr{U}_O$ 中有 $D^2\rho^2 > 0$。

证明 设 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 是在 O 的一个邻域 $\mathscr{U}$ 中以 O 为中心的法坐标系（见 §4 的(4.10)）。由 (4.10) 知，$D^2\rho^2$ 在 M_O 上正好是 M_O 中内积的两倍，即

$$D^2\rho^2(v, w) = 2\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in M_O.$$

所以在 O 处，$D^2\rho^2 > 0$，于是在 O 的一个邻域 $\mathscr{U}_O \subset \mathscr{U}$ 中有

$$D^2\rho^2 > 0.$$

证毕。

现在我们给出定理 3 及引理 4 的几何解释。我们先复习一下单变量函数凸性的概念。函数 $f:[a, b] \to \boldsymbol{R}$ 为**凸的**充要条件是 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$，$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ 及 $\forall \lambda \in [0, 1]$。从图形上看，这意味着连接 f 的图上任何两点的弦必位于图形之**上方**，即图形是**向上凹的**。如图 6.2。这样定义的凸函数必定是 Lipschitz 连续的（见 [R3]）。对我们来说，重要的事是要认识到：一个 C^∞ 函数 f 为凸的充要条件是 $f'' \geqslant 0$。这能通过考虑 f 的二阶 Taylor 表达式而被证得，但是对于 C^∞ 函数，

可十分容易地导入**严格凸**的概念：C^∞ 函数 f 是严格凸的，当且仅当 $f''>0$。

设M是一个黎曼流形，$f:M\to \boldsymbol{R}$ 是一个实值函数。f 为凸的充要条件是它对每一条测地线的限制成为一个单变量的凸函数。由此可知，M 上一个 C^∞ 函数 f 为凸的充要条件是对每一条测地线有 $(f\circ\gamma)''\geqslant 0$。由 §2 的 (2.5) 知道，$M$ 上的 C^∞ 函数 f 为凸的充要条件是：对M上的所有向量 v，有 $D^2f(v, v)\geqslant 0$，即在每点处 D^2f 是半正定的，也就是说 $D^2f\geqslant 0$。注意：类似地，M 上一个 C^∞ 函数 f 是**严格凸的**充要条件是它对每一条测地线的限制是一个单变量的严格凸函数。由上述相同的理由，f 为严格凸的充要条件是 $D^2f>0$。注意：我们仅对 C^∞ 函数定义了严格凸性。

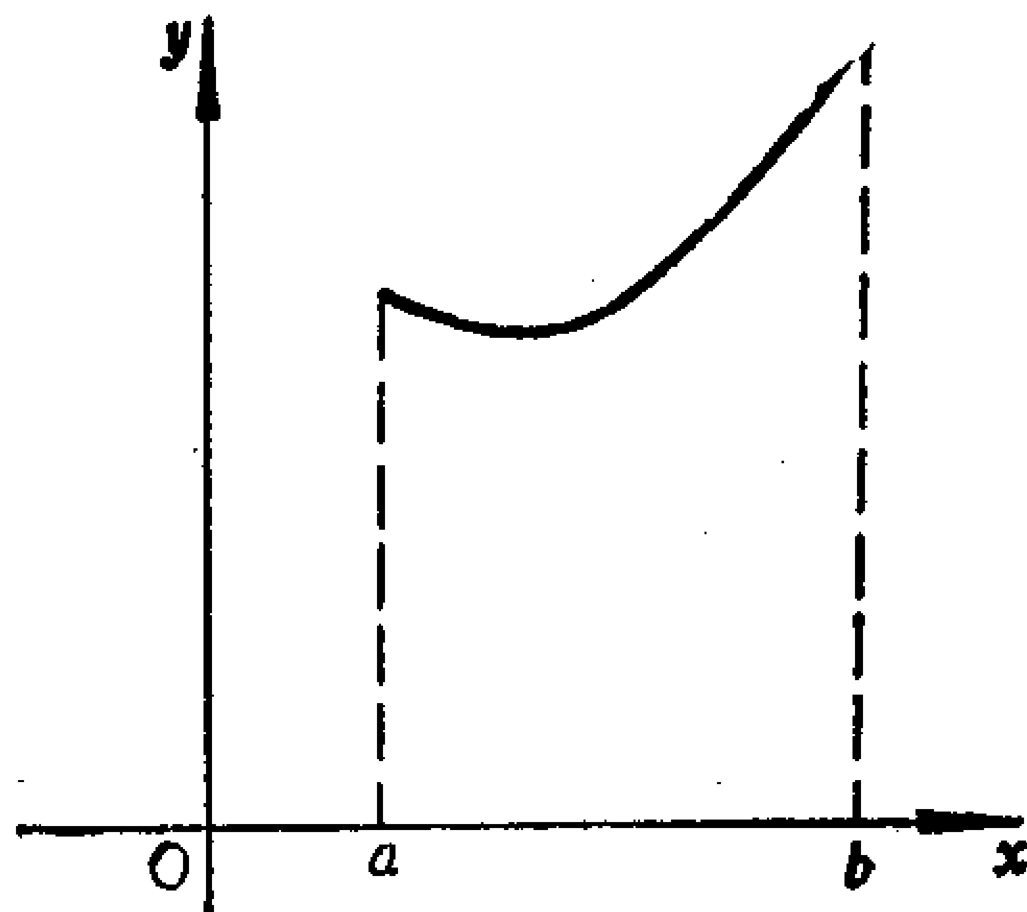


图 6.2

习题 1. $\boldsymbol{R}^n$ 的一个开集 Ω 被定义为**凸的**，当且仅当连结 Ω 上的任何两点的直线段整个地落在 Ω 之中。设在 Ω 上配备着从 $\boldsymbol{R}^n$ 的平坦度量所诱导的度量，证明：

(1) 如 Ω 是凸的，$f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ 是一个凸函数，则 f 在 $\Omega\times\boldsymbol{R}$ 中的图(注意不是在 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}$ 中的图)是 $\Omega\times\boldsymbol{R}$ 的一个凸子集的边界；

(2) 设 Ω 为凸的，且设 $f:\Omega\to\boldsymbol{R}$ 为一个任意实值函数，使得它在 $\Omega\times\boldsymbol{R}$ 中的图是 $\Omega\times\boldsymbol{R}$ 的一个凸子集的边界，于是 f 是一个凸函数；

(3) 假设对每一$x\in\bar{\Omega}$，存在 x 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个邻域 $\mathscr{U}_x$，使得 $\Omega\cap\mathscr{U}_x$ 为凸，于是 Ω 为凸。

现在，任意黎曼流形中的一个子集 Ω 称为是**全凸的**，当且仅当连接 Ω 的任何两点的任何测地线整个地位于 Ω 之中。如果对任何 $x, y\in\Omega$，在 Ω 内有**最短的**测地线连接 x, y，且连接 x 到 y 的任何

最短的测地线都位于Ω之中，则称Ω是**凸的**. 由 Cartan-Hadamard 定理知道，在具有非正截面曲率的完备单连通黎曼流形上，任何测地线 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条最短的测地线，因而凸集也是全凸的. 一般地，下述例子表明这两个概念之间存在着一个差异.

让我们在这里再引入一个术语. 对点 $O\in M$，集合

$$\{x\in M: d(0,x)<r\} \quad 及 \quad \{x\in M: d(0,x)\leqslant r\}$$

分别称为以O为心，半径为$r(r\in \boldsymbol{R}^+)$的**开测地球**及**闭测地球**. 在此术语下，Hopf-Rinow 定理蕴含：黎曼流形完备的充要条件是其所有闭测地球是紧致的.

例 1 在单位球面 $S^2\subset\boldsymbol{R}^3$ 上半径$\leqslant\pi/2$的开测地球是凸的，但不是全凸的，见图 6.3(a). 半径 $r(\pi/2<r<\pi)$ 的开测地球甚至不是凸的，如图 6.3(b)所示. 半径为$\pi/2$的闭测地球B(即闭半球) 不是凸的. 这是因为对这样一个球B及对∂B中的任何对径点x和y，∂B 的一部分提供了连接x到y的一条最短的测地线，它位于B之中，但也还存在着无限(不可数)条连结x到y的最短测地线，除了两端点x及y外，它们位于 S^2-B 之中.

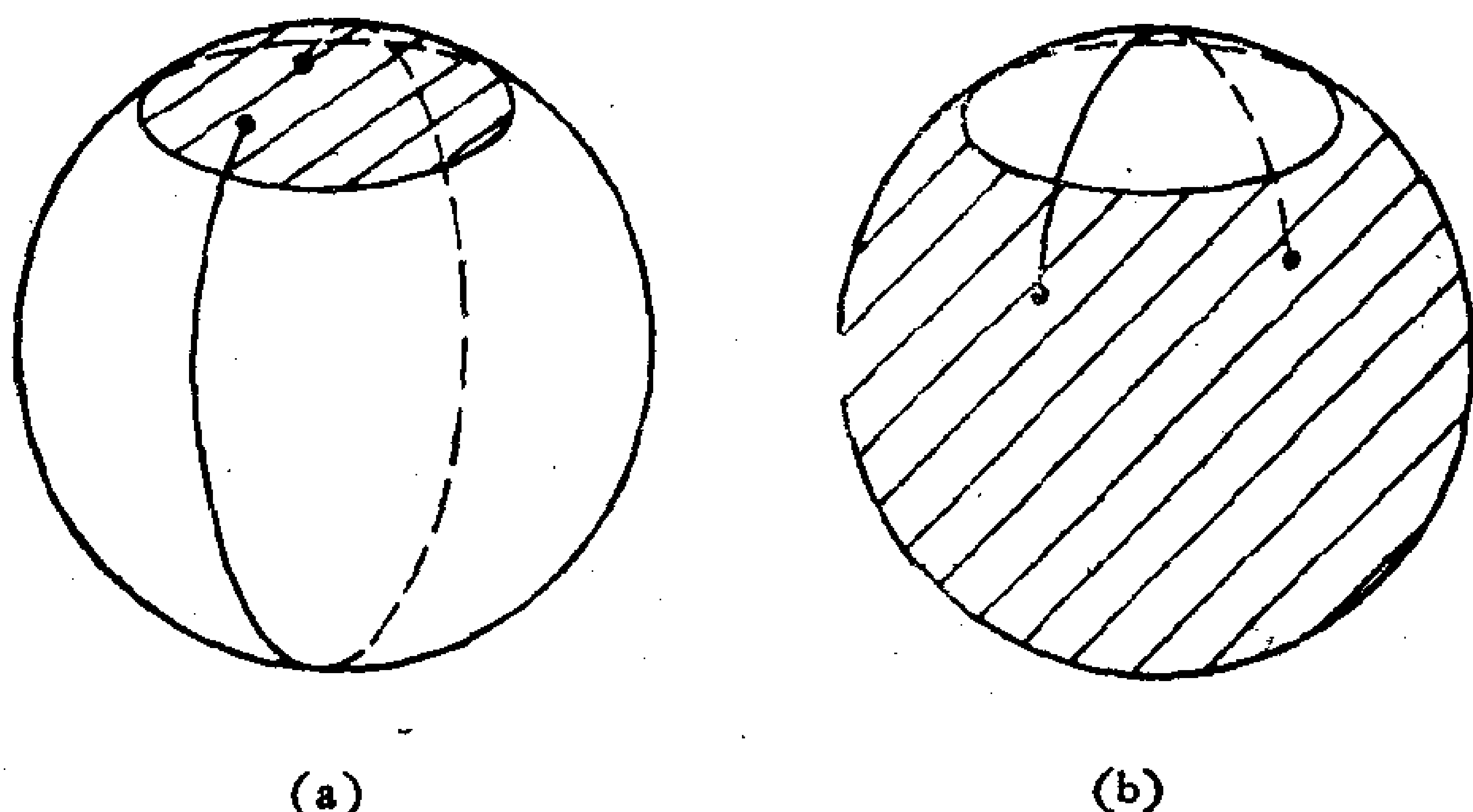


图 6.3

例 2 $\boldsymbol{R}^3$中的柱面 $\{(x,y,z): z\in R,\ x^2+y^2=1\}$ 提供了类似于上面的现象. 半径$\leqslant\pi/2$的开测地球仍为凸，但不是全凸的. 但所有半径$>\pi/2$的开的或闭的测地球甚至不是凸的.

习题 2. 对柱面证明上述最后的结论.

下列引理提供了凸函数与凸集之间的联系.

引理 5 (1) 设 $\tau: M \to \boldsymbol{R}$ 是定义在一个任意的黎曼流形 M 上的一个凸函数. 定义**水平子集** $M_c (c \in \boldsymbol{R})$ 为

$$M_c \equiv \{x \in M : \tau(x) < c\}.$$

则端点 $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ 在某个 M_c 中的任何测地线 $\gamma:[a,b] \to M$ 必整个地位于 M_c 之中;

(2) 假设 M 为完备, $\tau: M \to \boldsymbol{R}$ 为凸, 则 τ 的所有水平子集 M_c 为全凸集.

证明 (2)是(1)的平凡推论. 而(1)得自事实: 单变量的凸函数必在其定义域的端点处达到其最大值. 证毕.

现在, 定理 3 的几何解释是: 对非正的截面曲率的单连通完备的黎曼流形, 它的所有的测地球(开的或闭的)都是全凸集. 特别,这样的流形上**每点都是全凸的**(即等价地,对每一 $x \in M$,不存在非平凡的测地线 $\gamma:[a, b] \to M$ 使得 $\gamma(a) = \gamma(b) = x$). 如在黎曼流形 M 中只存在一个全凸紧致子集 K, 则它蕴含着深远的拓扑含义,即自然包含 $K \hookrightarrow M$ 是一个同伦等价 ([CE], 第 147 页). 对非正截面曲率的黎曼流形中凸性的更系统的讨论, 可见 [BO]. 定理 3 对这种流形上函数论的影响的讨论,见 [GW3]. 目前在黎曼几何的范围内对凸集的兴趣将特别围绕着 Gromoll-Meyer 的文章,见 [GM]. R. Walter 的概括性的文章 [W2] 给出了在此领域中直至 1981 年所知道的包罗万象的内容. 对于连续凸函数的一般的讨论可见 [GW2],也可看 [GS3].

现在我们给出引理 4 的几何解释:

定理 6(J. H. C. Whitehead) 在黎曼流形上, 每一点具有一个凸邻域.

证明 给定 $x \in M$,设 ε 是一个正数,使得: (1) $\exp_x$ 在 M_x 中半径为 ε 的球 $B(\varepsilon)$ 上为微分同胚;(2) $B_\varepsilon(x) \equiv \exp_x B(\varepsilon)$在

M中有紧致闭包,以及(3)如用ρ表示到x的距离,则ρ^2在$B_\varepsilon(x)$上是C^∞及严格凸的(即引理4). 根据§3的引理1, 我们也可假设ε是如此小, 以致对每一 $y\in B_\varepsilon(x)$, $\exp_y$ 是在M_y的半径ε的球上的一个微分同胚. 现在设 $\delta=\varepsilon/3$, 我们将证明: 以x为心, δ为半径的开测地球是一个凸集(图6.4).

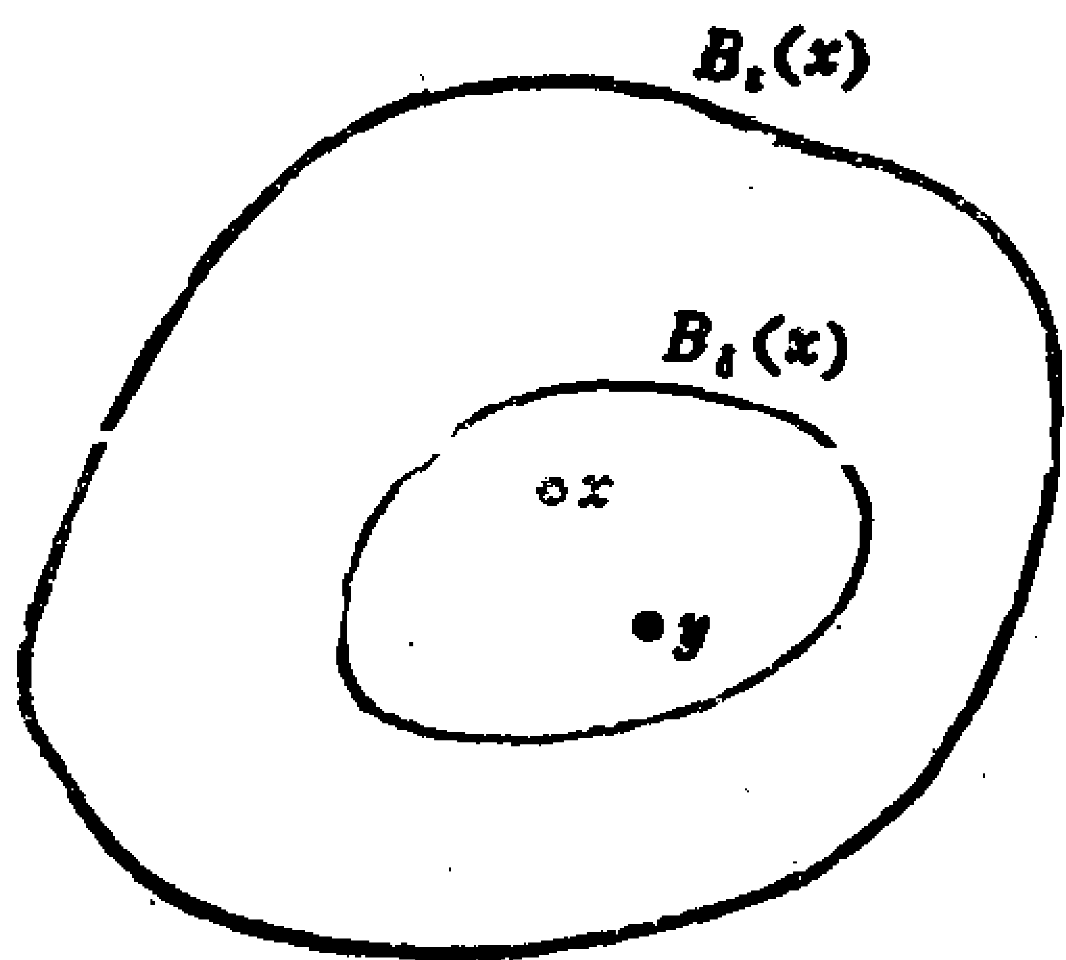


图 6.4

设 $y\in B_\delta(x)$, 我们先证明$B_\delta(x)\subset B_\varepsilon(y)$, (这里 $B_\varepsilon(y)$ 是以y为心,半径为ε的开测地球). 这是因为对每一个 $z\in B_\delta(x)$ 有

$$d(z, y)\leqslant d(z, x)+d(y, x)$$

$$\leqslant \delta+\delta=\frac{2}{3}\varepsilon.$$

现由§3的定理2, $B_\varepsilon(y)=\exp_y B(\varepsilon)$, 这里的 $B(\varepsilon)$ 是 M_y 中半径为ε的球,使得 $B_\delta(x)$ 中每点z能用一条最短的测地线ζ将它与y连接. 现在ζ必须位于 $B_\varepsilon(x)$ 之中, 这是因为从 $B_\delta(x)$的一点发出的曲线,如果它离开了 $B_\varepsilon(x)$ 又返回 $B_\delta(x)$, 其长度将$\geqslant 2(\varepsilon-\delta)=4\varepsilon/3$, 而与 $L(\zeta)<\varepsilon$ 矛盾. 再利用引理5的(1)知 $\zeta\subset B_\delta(x)$. 因为y, z为任意, 所以 $B_\delta(x)$ 的任何两点能用位于 $B_\delta(x)$ 中的一条最短的测地线相连接. 前面的论证已经表明,这样的最短测地线是唯一的. 证毕.

注记. 上述证明能被用来对具有线性联络的流形证明一个类似的定理(见 [KN, I], 第149页). 事实上, 这是 Whitehead 的原始的定理. 凸邻域的存在性能使许多局部性的论证变得容易些. 进而,在层的上同调理论中需要用到凸邻域. (见[W7]中第107页.)

第二变分公式的第二个应用是下列美妙的 J. L. Synge 定理.

定理 7 (J. L. Synge) 如M是正截面曲率的偶数维紧致定向黎曼流形，则M是单连通的。

在给出正式的证明之前，我们应对**可定向性**的定义作些解释。存在着许多等价的定义，然而就我们所知，最合理的讨论是在[GKM] 的 §7.4 中，这里采用的定义是：C^∞ 流形M为**可定向的**，当且仅当在M上存在一处处非零的 C^∞ 的 n-形式 ($n = \dim M$)。这个定义技术上处理起来是方便的，同时它也是十分直观的：这样一个 n-形式 ω 把在每一 M_x 中的基 $\{e_i\}$ 分成两类，一类满足 $\omega(e_1, \cdots, e_n) > 0$，另一类满足 $\omega(e_1, \cdots, e_n) < 0$。称第一类基为**顺向的**。由线性代数的知识知道，如两组基都是顺向的，则其中一组基关于另一组基的矩阵有正的行列式，这表明我们现在所采用的定向性的定义与通常用行列式表出定向性的定义之间的关系。

对于定理 7 的证明，下列简单的观察起了一个重要的作用。换言之，如 $\gamma:[a, b] \to M$ 是在定向黎曼流形M中的一条曲线，且如 $\{e_i\}$ 为 $M_{\gamma(a)}$ 中与M的顺向基，于是 $M_{\gamma(b)}$ 中的基 $\{P^\gamma(e_i)\}$ 也是顺向的，这里 $P^\gamma: M_{\gamma(a)} \to M_{\gamma(b)}$ 是沿 γ 的平行移动。为证明这一点，设 $\{e_i(t)\}$ 是沿 γ 的平行向量场的基，使得对每一个 i，有 $e_i(a) = e_i$，设 ω 为M的定向 n-形式，则 $t \longmapsto \omega(e_1(t), \cdots, e_n(t))$ 是在 $[a, b]$ 上处处非零的 C^∞ 函数，它在 $t = a$ 处为正，于是必处处为正。因而 $\omega(e_1(b), \cdots, e_n(b)) > 0$。于是 $P^\gamma(e_i) = e_i(b)$，$\forall i$，确实是顺向的。特别考虑 γ 为一条闭曲线的情形，譬如 $x = \gamma(a) = \gamma(b)$，由前面的议论知道 $\{P^\gamma(e_i)\}$ 关于 $\{e_i\}$ 的矩阵有正的行列式。等价地说，线性变换 $P^\gamma: M_x \to M_x$ 有正的行列式。因为 P^γ 是一个正交变换，所以行列式为+1。综上所述，有

引理 8 设 $\gamma:[a, b] \to M$ 为一个可定向的黎曼流形M中的一条闭曲线，使得 $x = \gamma(a) = \gamma(b)$，则沿 γ 的平行移动同构 $P^\gamma: M_x \to M_x$ 有行列式+1。

定理 7 的证明 假设M不是单连通的，我们需要证明：这时M具有一条闭曲线 $\gamma:[0, b]\to M$，使得在M中所有不同伦于零的逐段 C^∞ 闭曲线中，它的长度为绝对极小。如这一点已证明，我们就能用下述方式推出矛盾。首先，这条γ必须是一条闭测地线，即γ是测地线，且 $\dot\gamma(0)=\dot\gamma(b)$。这是因为$\gamma$必须局部长度极小(即如$p$, q为M的位于γ上的点，且 p, q 充分接近，则γ上连接p到q的线段为在所有连接p,q的曲线中具有最短长度的一条曲线)，再应用§3 的定理 2 可知，γ是一条正规的闭测地线。设 $x=\gamma(0)=\gamma(b)$。由引理 8，平行移动同构 $P^\gamma:M_x\to M_x$ 有行列式 1。如果把 P^γ 的特征值排列成

$$\lambda_1,\bar\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\bar\lambda_j,\underbrace{-1,\cdots,-1}_{k},\underbrace{+1,\cdots,+1}_{l},$$

这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_j$ 是绝对值为 1 的复数。因为P^γ是一个正交变换，且 $\dim M$ 为偶数，所以$k+l$为偶数，再由 $\det P^\gamma=1$ 可推出l为偶数。又因为γ是一条闭测地线，所以$P^\gamma(\dot\gamma(0))=\dot\gamma(b)$，即 $l>0$，于是P^γ的相应于特征值为 1 的特征空间的维数l至少为 2。因此必存在一个单位向量 $e\in M_x$，使得 $P^\gamma(e)=e$，且 $e\perp\dot\gamma(0)$。设U是沿γ的平行向量场，使得 $U(0)=e$，由于e是P^γ的不变向量，所以 $U(b)=e$。现在设$\{\gamma_u\}$为一个单参数闭曲线族，使得 $\gamma_0=\gamma$，而且它的横截向量场正好是U，(这样一个族必能找到，例如可取 $\gamma_u(t)=\exp_{\gamma(t)}(uU(t))$)(见图 6.5)。由(6.5)知道，这个单参数曲线族的弧长的第二变分为

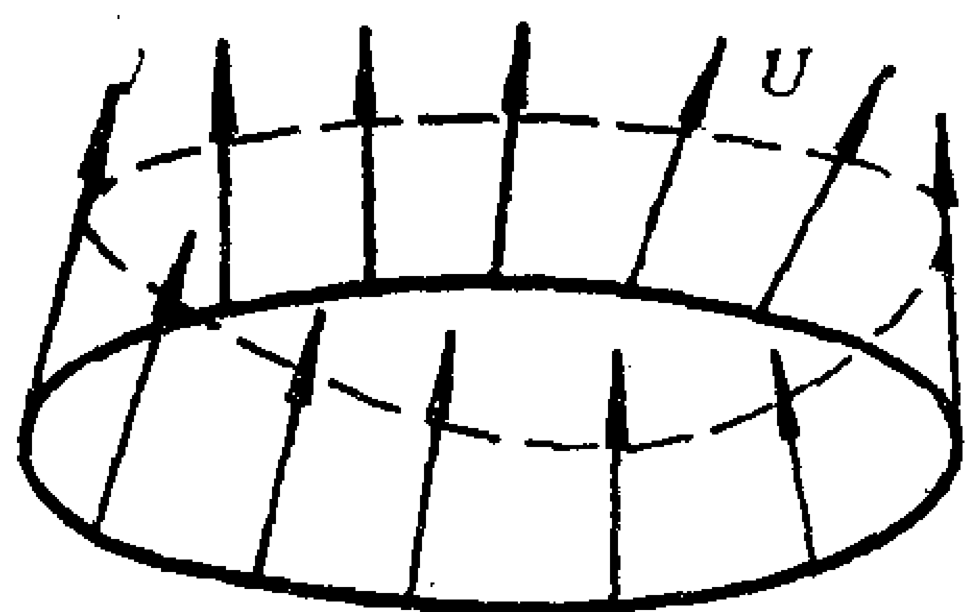


图 6.5

$$L''(0)=\int_0^b(|\dot U^\perp(0)|^2-\langle R_{\dot\gamma U^\perp}\dot\gamma,U^\perp\rangle)(t)dt.$$

这时边界项没有了。又因为 $U^\perp=U(e\perp\dot\gamma(0))$，且$U$为平行，所

以 $\dot{U}^{\perp}=0$,于是由正截面曲率的假设知道 $L''(0)<0$,这说明了对每一个充分小的 $u\neq 0$, γ_u 是一条同伦于 γ 的闭曲线,且比 γ 有严格短的长度,这就产生了矛盾.

剩下需要证实:在所有不同伦于零的逐段 C^∞ 闭曲线中,存在着这样一条最小长度的闭曲线 γ. 因为我们假设 $\pi_1(M)\neq 1$,设 $\widetilde{M}$ 为M的万有覆盖空间,且 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 为覆盖投射. 在 $\widetilde{M}$ 上可按下法定义一个流形结构. $\widetilde{M}$ 的坐标邻域可取 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ 的连通分支,其中$\mathscr{U}$是M中任何凸邻域(定理 6).进而,设 $\{x^1,\cdots,x^n\}$是在这种$\mathscr{U}$中的法坐标,且设$\mathscr{U}_i$为 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ 的一个分支,所以 $\pi:\mathscr{U}_i\to\mathscr{U}$ 为一个同胚,于是我们在$\mathscr{U}_i$上定义坐标函数 $\{y^1,\cdots,y^n\}$ 为 $y^i=x^i\circ\pi$. 可以直接验证:(1) $\widetilde{M}$ 成为一个 C^∞ 流形;(2) π 成为 C^∞ 的submersion,即 π 是一个 C^∞ 映射,使得 $d\pi$ 为一个局部微分同胚,而且 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 为满映射. 设 g 是M上的黎曼度量,在 $\widetilde{M}$ 上用 $\tilde{g}=\pi^*g$ 定义一个黎曼度量 $\tilde{g}$. 于是 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 成为一个局部等距. 如M为完备,我们证明 $\widetilde{M}$ 也是完备的. 这是因为如果假设 $[0,b)$ 是 $\widetilde{M}$ 中一条正规测地线的最大定义域,且 $b<\infty$, 则 $\pi(\gamma):[0,b)\to M$ 为M中的一条测地线. 因为M是完备的,$\pi(\gamma)(b)$ 有定义,譬如说 $\pi(\gamma)(b)\equiv x\in M$.设$\mathscr{U}$为 x 的一个凸邻域,且 $a<b$,使得 $\pi(\gamma)(a)\in\mathscr{U}$. 如$\mathscr{U}_i$是 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$的包含 $\gamma(a)$ 的分支,则等距的 $\pi^{-1}:\mathscr{U}\to\mathscr{U}_i$ 映测地线 $\pi(\gamma)$ (其定义域已超过 b) 到$\mathscr{U}_i$中的一条测地线,因为 $\pi(\gamma)$ 的定义域可伸展到 b 以外,所以$\mathscr{U}_i$中的相应测地线 γ 也可延伸到 b 之外,这就与 $[0,b)$ 的最大性发生矛盾.

上面这一段议论对所有黎曼流形都成立. 设 $x\in M$, 且设 $\pi^{-1}(x)=\{x_1,x_2,\cdots\}$. 因为我们假设了 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 为一个非平凡的覆盖投射,所以 $\pi^{-1}(x)$ 至少有两个元素,对M中从 x 出发的每一条曲线 ξ,在 $\widetilde{M}$ 中存在着唯一的曲线 $\tilde{\xi}$, 使得 $\tilde{\xi}$ 在 $\pi^{-1}(x)$ 的一个特定的点(譬如说 x_1) 处出发, 而且 $\pi(\tilde{\xi})=\xi$. 这条 $\tilde{\xi}$ 被称

为是 ξ 的以 x_1 为初始点的提升．而且回忆：

如 $\gamma:[0,1]\to M$ 为一条以 x 为基点的闭曲线（即 $\gamma(0)=\gamma(1)=x$），则 γ 不同伦于零的充要条件是它的以（譬如说）x_1 为初始点的提升 $\tilde{\gamma}$ 是以 $\pi^{-1}(x)$ 中不同于 x_1 的点为终点的． (6.7)

现设 M 为完备，$x\in M$ 已取定，我们需要证明：存在一条以 x 为基点的闭曲线 γ，它在所有以 x 为基点的不同伦于零的逐段 C^∞ 闭曲线中具有极小的长度．由(6.7)，如 $\tilde{\gamma}$ 是 $\widetilde{M}$ 中连接 $\pi^{-1}(x)$ 的不同元素的一条曲线，且在所有这类曲线中具有极小长度，则曲线 $\gamma=\pi(\tilde{\gamma})$ 将具有所希望的性质．设

$$\pi^{-1}(x)=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\},$$

且设这样的 $\tilde{\gamma}$ 连接了点 x_p 到 x_q，且 $x_p\neq x_q$．因为 $\widetilde{M}$ 是完备的，所以仅当 $\tilde{\gamma}$ 是一条连接 x_p 到 x_q 的最短的测地线，即仅当 $\tilde{\gamma}$ 的长度满足 $L(\tilde{\gamma})=d(x_p,x_q)$ 时，$\tilde{\gamma}$ 才具有这个极小性质． 于是考虑

$$\lambda=\inf_{p\neq q}d(x_p,x_q),$$

且我们希望证明：存在着 i,j，使得 $\lambda=d(x_i,x_j)$．为简化起见，我们先证明：

$$\lambda=\inf_{k\geqslant 2}d(x_1,x_k). \tag{6.8}$$

其理由如下．设 $h:\widetilde{M}\to\widetilde{M}$ 为覆盖变换，$\pi:\widetilde{M}\to M$ 为覆盖投射，使得 $h(x_p)=x_1$． 由 $\widetilde{M}$ 上 C^∞ 结构的定义，每一个覆盖变换是 C^∞ 映射，且由 π 为局部等距及 $\pi\circ h=\pi$ 可知，h 是一个局部等距．因为 h 是同胚，所以 h 确实是一个整体等距．特别如 $h(x_q)=x_k$，则

$$d(x_p,x_q)=d(h(x_p),h(x_q))=d(x_1,x_k).$$

因为 p，q 是任意的，所以(6.8)被证得．

因为 M 的每点是被均匀地覆盖着，（即对每点 $x\in M$，令

$\pi^{-1}(x)=\{x_1,x_2,\cdots\}$，总可找到适当的邻域$\mathscr{U}$，使得 $\pi^{-1}(\mathscr{U})$ 的包含 x_i 的分支（记为 $\mathscr{U}_i$）与 $\mathscr{U}$ 同胚，而且 $\mathscr{U}_i\cap\mathscr{U}_j=\varnothing$，$\forall i\neq j$，所以 $\lambda>0$。我们进而要去证明：存在着某个 $j>1$，使得 $\lambda=d(x_1,x_j)$。设 $\{x_m\}$ 为 $\pi^{-1}(x)=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 中的一个序列，使得 $d(x_1,x_m)\to\lambda$。序列 $\{x_m\}$ 是一个有界集，于是由 $\widetilde{M}$ 的完备性知道，存在 $\tilde{x}\in\widetilde{M}$，使得 $\{x_m\}$ 的一个子序列 $\{x_\beta\}$ 收敛于 $\tilde{x}$。由 π 的连续性，$\tilde{x}\in\pi^{-1}(x)$。于是存在某个 j，使得 $\tilde{x}=x_j$。因为 $\lambda>0$，所以有 $j>1$。又因为 $\pi^{-1}(x)$ 是离散的，所以仅当对所有充分大的 β 都有 $x_\beta=x_j$，才能使 $\{x_\beta\}$ 收敛于 x_j。于是证得了确实存在某个 $j>1$，使得 $\lambda=d(x_1,x_j)$。现设 $\tilde{\gamma}$ 为连接 x_1 到 x_j 的一条最短的测地线，且设 $\gamma=\pi(\tilde{\gamma})$，则 γ 是一条以 x 为基点的，且具有所欲的性质的闭曲线。

（**注意**：为了对随后的论证易于理解起见，人们应当看出：$\tilde{\gamma}$ 是测地线以及 π 为局部等距仅蕴含 γ 是一条从 x 发出的测地线，而在 x 处可能会有一个“角点”，见图 6.6。）

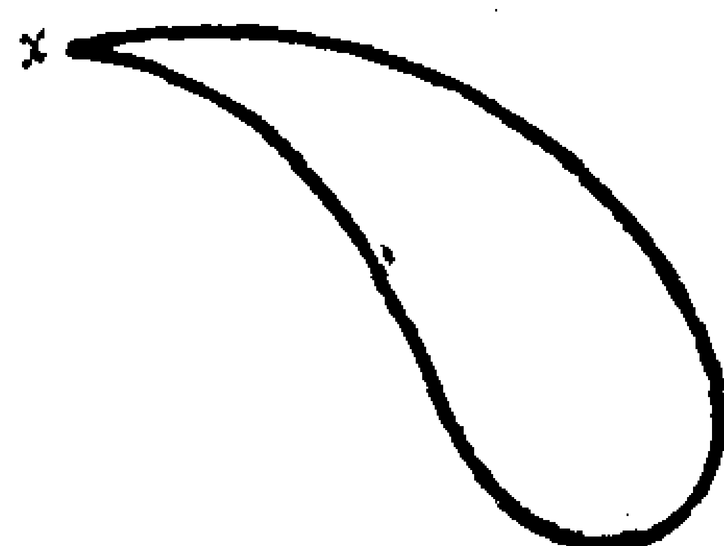


图 6.6

对每一点 $x\in M$，我们已构造了一条闭曲线，记为 γ_x，它不同伦于零，且在所有以 x 为基点及不同伦于零的闭曲线中具有极小长度。如 $y\neq x$，可能发生 $L(\gamma_y)<L(\gamma_x)$ 的现象。因而建议我们去定义一个函数 $\Phi: M\to \boldsymbol{R}$，使得 $\Phi(x)=L(\gamma_x)$。可以证明Φ是连续的。这可在M中用 ε-δ 的方法直接论证，也可以把它转移到在 $\widetilde{M}$ 中的提升曲线 $\tilde{\gamma}_x$，然后在 $\widetilde{M}$ 中去讨论。现在我们第一次来运用M为紧致的假设，因此Φ 在某点 $x_0\in M$ 处达到绝对极小。于是 γ_{x_0} 成为一条在M的所有不同伦于零的逐段 C^∞ 闭曲线中具有极小长度的曲线。证毕。

上述证明是美妙的。人们试图将它推广，用极小曲面来代替测地线，但没有获得大的成功。“如 $\pi_1(M)\neq 1$，则在非零伦的闭

曲线中存在一条具有极小长度的曲线”这一事实能被用来证明更强的结论，即在 $S^1 \to M$ 的映射的每一个同伦类中（S^1 是单位圆周），存在一条最短长度的曲线. 而通常人们在证明 Synge 定理时要利用这个更强的结论（即“曲线的每一个自由同伦类中有一条最短的曲线”），而事实上这是不必要的.

我们可以进一步问：当 M 是不可定向时定理将会怎样？或者当 $\dim M$ 为奇数时会发生什么现象？这些问题都能圆满地回答. 为此我们必须先去讨论一个不可定向流形的**定向覆盖**. 先看

引理 9 对黎曼流形 M，下列各点是等价的：

(1) M 为可定向的；

(2) $\forall x \in M$，沿以 x 为基点的任何闭曲线 γ 的平行移动同构 $P^\gamma: M_x \to M_x$ 的行列式为 1；

(3) 存在 $x \in M$，使得沿任何以 x 为基点的闭曲线 γ 的平行移动同构 $P^\gamma: M_x \to M_x$ 的行列式为 1.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)：由引理 8 可得.

(2) $\Longrightarrow$ (3)：这是平凡的.

(3) $\Longrightarrow$ (1)：固定 M_x 中的一组幺正基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. 如果 $y \in M$ 及 $y \neq x$，取连接 x 到 y 的任何两条曲线 γ_1 和 γ_2，且设 P^1 及 P^2 分别是沿 γ_1 和 γ_2 的平行移动同构 $M_x \to M_y$. 由假设，$\det((P^1)^{-1} \circ P^2) = 1$，于是线性代数表明

$$P^1(e_1) \wedge \cdots \wedge P^1(e_n) = P^2(e_1) \wedge \cdots \wedge P^2(e_n).$$

由此我们能在 M 上定义一个反对称的张量场 T 为

$$T(y) = e_1(y) \wedge \cdots \wedge e_n(y), \quad \forall y \in M,$$

这里 $\{e_i(y)\}$ 是 M_y 中的一组基，它是从 M_x 中的基 $\{e_i\}$ 经过沿 x 到 y 的任意一条曲线平行移动而来的. M 上由 $\omega(T) = 1$ 所定义的 n- 形式 ω 就确定了 M 上的一个定向. 证毕.

现设 M 为不可定向. 在每个 M_x 的基之间导入等价关系“$\sim$”为：

$\{e_i\} \sim \{f_i\}$ 当且仅当 $\{e_i\}$ 关于 $\{f_i\}$ 的矩阵的行列式为正.

这样就把每个 M_x 中的基分成两个等价类，我们称一个等价类为 M_x 的一个**定向**. 一个给定基 $\{e_i\}$ 的等价类将用 $[e_i]$ 或 $[e_1, \cdots, e_n]$ 表示. 现设

$$\hat{M} = \{(x, \mu): x \in M, \ \mu \text{是} M_x \text{的一个定向}\},$$

并定义映射 $\pi: \hat{M} \to M$ 为 $\pi(x, \mu) = x$. 在点 $(x, \mu) \in \hat{M}$ 处导入如下的邻域：设 $\mathscr{U}$ 是 x 的一个凸邻域，在 $\mathscr{U}$ 中取法坐标系 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 使得

$$\mu = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \ \cdots, \ \frac{\partial}{\partial x^n}(x)\right].$$

于是令

$$\hat{\mathscr{U}} = \left\{(y, \mu'): y \in \mathscr{U}, \mu' = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}(y), \ \cdots, \ \frac{\partial}{\partial x^n}(y)\right]\right\}.$$

这样的 $\hat{\mathscr{U}}$ 所组成的集合给出了 $\hat{M}$ 中的一个邻域系. 可以直接验证: $\hat{M}$ 成为一个 C^∞ 流形. 由于引理 9,它是连通的，且 $\pi: \hat{M} \to M$ 是一个二重覆盖,所以 π 是一个 C^∞ 的 submersion, (见定理 7 的证明). 如 g 为 M 上的黎曼度量,则 $\hat{g} = \pi^* g$ 为 $\hat{M}$ 上的黎曼度量，于是 π 是一个局部等距. 进而，如 M 为完备，则 $\hat{M}$ 也是完备的.

由引理 9 易知, $\hat{M}$ 总是可定向的. 称 $\pi: \hat{M} \to M$ 为 M 的**定向覆盖**. 于是只要通过一个二重覆盖后，每一个黎曼流形都能成为可定向的. 考虑到这一点后，如 M 是一个偶数维的具有正截面曲率的不可定向的紧致黎曼流形，则由定理 7 知道 $\hat{M}$ 必须是单连通的. 因此定理 7 等价于

定理 7′(Synge)　设 M 为具有正截面曲率的紧致、偶数维黎曼流形，如果 M 是可定向的，则它必为单连通，如 M 不可定向，则 $\pi_1(M) = Z_2$.

我们把奇数维的情形留作下面的习题.

习题 3. 设M是一个正截面曲率的奇数维紧致黎曼流形.证明：M是可定向的.（提示：利用 $\pi:\hat{M}\to M$，并模仿定理 7 的证明.）

在奇数维的情形下对基本群谈不出很多内容．例如，S^{2n+1}可作为一大批曲率为 $+1$ 的紧致空间形式的覆盖空间(见[W8]).与之相对照，曲率为 $+1$ 的偶数维空间形式的个数问题几乎是平凡的.

习题 4. (1) 设 S^n 为 R^{n+1} 中 n 维单位球面．定义 $P_nR\equiv\{\{x,-x\}: x\in S^n\}$，且定义

$$\pi:S^n\to P_nR \text{ 为 } \pi(x)=\{x,-x\},\quad \forall x\in S^n.$$

证明：P_nR 能成为一个 C^∞ 流形，且使 $\pi:S^n\to P_nR$ 成为一个 submersion．试叙述如何在 P_nR 上导入一个度量，使得 π 成为一个局部等距；

(2) 如M是曲率为 1 的空间形式，则M为紧致；

(3) 如M是曲率为 1 的 $2n$ 维空间，则M或者等距于 S^{2n} 或者等距于 $P_{2n}R$（读者可假设 S^{2n} 中所有的等距都是由 R^{2n+1} 的正交变换所诱导出来的，见 §5 中推论 15 后的一段评论）.

称习题 4 中的 P_nR 为 n **维实射影空间**．习题 4 中部分(3)的证明也能用其他的方法(群论或代数拓扑)来完成.

设在两个维数相同的可定向流形 M_1, M_2 之间有一个 C^∞ 映射 $f:M_1\to M_2$，分别令 ω_1, ω_2 为在 M_1, M_2 上用来确定定向的、处处非零的 n-形式．如果从 $\omega_1(e_1,\cdots,e_n)>0$，我们可得出 $\omega_2(\mathrm{d}f(e_1),\cdots,\mathrm{d}f(e_n))>0$，则称 f 是**定向保持的.**

习题 5. (A. Weinstein)．(1) 设M为具有正截面曲率的偶数维紧致可定向黎曼流形．证明任何定向保持的等距 $\sigma:M\to M$ 必有一个固定点；

(2) 试利用部分(1)推出 Synge 定理.

与定理 3 及引理 4 相对照，有下列结果：

习题 6. (1) 给定 $O\in M$，M 是一个任意的黎曼流形．设 ρ 是相对于 O 的距离．证明：在 O 的邻近，ρ 决不是 C^1 的.

(2) 设在部分(1)中的M为紧致，则ρ在 $M-\{O\}$ 上决不是 C^1 的.

§7 Morse 指标形式和 Bonnet-Myers 定理

本节参考文献

[GKM], §§4.5, 7.3.

[CE], 第 24 页至第 29 页.

(对于本节中的材料，在 [KN, II] 中的处理是不很理想的，[M1] 中的 §§11—14 及 §19 处理得很漂亮，但强调之处略有不同.)

现在我们希望对 §6 中的第二变分公式 (6.5) 作进一步的考察. 直观地说，我们暂时把 $L(\gamma)$ 想像成一个定义在M中所有曲线 $\gamma:[a, b]\to M$ 的"空间"上的函数 L. 我们用 $\mathscr{C}$ 来表示这个"空间". $\mathscr{C}$ 中的"点"正好是M中的一条曲线，所以 $\mathscr{C}$ 中的一条"曲线"即为 §4 中所定义的单参数曲线族$\{\gamma_u\}$. 函数 $L:\mathscr{C}\to \boldsymbol{R}$ 对 $\mathscr{C}$ 中一条"曲线"(即单参数曲线族 $\{\gamma_u\}$) 的限制就是以前称之为 $L(u)$ 的函数，即 $L(u)=L(\gamma_u)$. 于是第二变分 $L''(0)$ 正好是 $L:\mathscr{C}\to \boldsymbol{R}$ 沿 $\mathscr{C}$ 中"曲线" $\{\gamma_u\}$ 的二阶导数.

我们想像在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的类似情形，即用 $\boldsymbol{R}^n$ 来代替 $\mathscr{C}$，用通常函数 $f:\boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 来代替 L，用 $\boldsymbol{R}^n$ 中一条曲线 ξ 来代替 $\{\gamma_u\}$，于是 $L''(0)$ 的替身应该是

$$\frac{d^2}{ds^2} f(\xi(s))\bigg|_{s=0}.$$

但是我们知道，至少在 $\boldsymbol{R}^n$ 中这个二阶导数 $\frac{d^2}{ds^2} f(\xi(s))\Big|_{s=0}$ 仅仅是描写 f 的 Hessian 在向量 $\dot{\xi}(0)$ 上取值的一种笨拙的方式，即

$$\frac{d^2}{ds^2} f(\xi(s))\bigg|_{s=0} = D^2 f(\dot{\xi}(0), \dot{\xi}(0)). \tag{7.1}$$

从微积分中我们知道对 D^2f 进行研究要比对更原始的概念"f 沿曲线的二阶导数"来得更重要，因而自然地要问，对于在 $\mathscr{C}$ 上已算出的 $L''(0)$ 的公式(6.5)，什么是"L 的 Hessian 双线性形式"？

我们将**形式地**去做这件事。由(7.1)可见，知道了

$$\frac{d^2}{ds^2}f(\xi(s))\Big|_{s=0}$$

就意味着知道了与双线性形式 D^2f 相配的二次型 $D^2f(v, v)(v \in M_x, x \in M)$，所以为了从二次型中恢复出双线性形式，我们利用众所周知的恒等式：$\forall v, w \in M_x$，$\forall x \in M$，有

$$D^2f(v, w) = \frac{1}{2}\{D^2f(v+w, v+w) - D^2f(v, v) - D^2f(w, w)\}, \tag{7.2}$$

这就是二次型的**极化**。它提供了如何通过极化 §6 的公式(6.5)中的 $L''(0)$，从而得出"L 的 Hessian"的一种方法。下面我们就按照这种方法去求"L 的 Hessian"。上述讨论看起来是直观的、形式的，其实它有其牢固的基础。只要人们愿意去考虑相应于上述 $\mathscr{C}$ 的"曲线的 Hilbert 流形"，所有前述的陈述都能精确地作出。对此有兴趣的读者可参看[K3]中的第一、二章。

设 γ 是一条正规测地线，$\{\gamma_u\}$ 是 γ **的一个变分**，即 $\{\gamma_u\}$ 是以 $\gamma_0 = \gamma$ 为基曲线的单参数曲线族。设 U 是 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场，我们在本节中总假设 $U(t) \perp \dot{\gamma}(t)$，$\forall t \in [a, b]$。回忆

$$L''(0) = \int_a^b \{|\dot{U}(t)|^2 - \langle R_{\dot{\gamma}(t)U(t)}\dot{\gamma}(t), U(t)\rangle\}dt + \langle D_{U(t)}U, \dot{\gamma}(t)\rangle\big|_a^b, \tag{7.3}$$

这里已令 $L(u) = L(\gamma_u)$。现在导入向量空间：

$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(a, b) =$ 沿 γ 的所有满足 $X(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ $(\forall t \in (a, b))$ 的逐段 C^∞ 向量场，

$$\mathfrak{V}_0 \equiv \mathfrak{V}_0(a, b) \equiv \mathfrak{V} \text{ 中由所有满足 } X(a) = X(b) = 0 \text{ 的 } X(t) \text{ 所构成的子空间}$$

($\mathfrak{V}$ 是德文大写字母 V), $\mathfrak{V}_0$是γ的所有正常变分(见 §6 引理 1)的横截向量场所构成的向量空间. 于是如果 $\{\gamma_u\}$ 是一个正常变分, 则(7.3)成为

$$L''(0) = \int_a^b \{|\dot{U}(t)|^2 - \langle R_{\dot{\gamma},U}\dot{\gamma},\ U\rangle(t)\}dt,$$

它表明 $L''(0)$ 仅依赖于 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场, 而不依赖于 $\{\gamma_u\}$ 的本身, 于是 $L''(0)$ 是一个定义在 $\mathfrak{V}_0$ 上的函数. 这类似于: 对 $\boldsymbol{R}^n$ 上函数 f 及 $\boldsymbol{R}^n$ 中一曲线 ξ, 则

$$\left.\frac{d^2}{ds^2} f(\xi(s))\right|_{s=0}$$

仅与 $\dot{\xi}(0)$ 有关(见上述(7.1)), 而与 ξ 本身无关. 由此就可导入定义:

$$I(X,\ X) \equiv \int_a^b \{|\dot{X}(t)|^2 - \langle R_{\dot{\gamma}(t)X(t)}\dot{\gamma}(t),\ X(t)\rangle\}dt,$$

$\forall X(t) \in \mathfrak{V}$ (注意: 不是在 $\mathfrak{V}_0$ 上), 这里 $\dot{X} \equiv D_{\dot{\gamma}}X$. 积分

$$\int_a^b |\dot{X}(t)|^2 dt$$

需要解释一下, 设 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ 是 $[a,b]$ 的一个**分割**, 使得在每个 $[a_i,\ a_{i+1}]$ 上, X 是 C^∞ 的. 于是定义

$$\int_a^b |\dot{X}(t)|^2 dt \equiv \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\dot{X}(t)|^2 dt. \tag{7.4}$$

我们回到 $I(X, X)$, 注意有 $I(aX,\ aX) = a^2 I(X,\ X)$. 现在我们可以定义:

$$I(X,Y) \equiv \frac{1}{2}(I(X+Y,\ X+Y) - I(X,X) - I(Y,Y)),$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{V}$$

(见上述(7.2))。简单的计算表明

$$I(X, Y)=\int_a^b\{\langle\dot{X}(t), \dot{Y}(t)\rangle - \langle R_{\dot{\gamma}(t)X(t)}\dot{\gamma}(t), Y(t)\rangle\}dt. \tag{7.5}$$

现在可以看出 $I(X, Y)$ 确实是双线性的，且对 X 和 Y 为对称。称 $I(X, Y)$ 为 γ **的指标形式**，它首先是由 M. Morse 导入的。于是假如变分 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场 U 是在 $\mathfrak{V}_0$ 中，则

$$L''(0)=I(U, U). \tag{7.6}$$

现在我们来叙述本节的主要论题：γ 的指标形式的代数性质和 γ 与所有邻近曲线相比较的极小化性质之间的关系。在给出精确的叙述之前，我们能通过下面很天真的方式给出一个粗糙的答案。给定了一条**正规**测地线 $\gamma:[a,b]\to M$，我们设想端点 b 缓慢地从非常靠近起点 a 的初始位置出发一步一步地延伸出去。当 b 非常靠近 a 时，由 §3 的定理已知 γ 是绝对极小，于是对 γ 的所有正常变分 $\{\gamma_u\}$，有 $L''(0)\geqslant 0$。由(7.6)，γ 的指标形式在 $\mathfrak{V}_0$ 上是半正定的。从而当 $|b-a|$ 足够小时，我们可以期望指标形式在 $\mathfrak{V}_0$ 上是正定的。但是当 b 逐渐从 a 附近移开，人们必须放弃指标形式是正定的希望，至少当 $\gamma(b)$ 越来越成为共轭于 $\gamma(a)$ 时，情况更是如此。其理由是：

引理 1 假设 $\gamma:[a, b]\to M$ 是一条正规测地线，使得 $\gamma(b)$ 共轭于 $\gamma(a)$，于是沿 γ 的任何使得 $U(a)=U(b)=0$ 的正常 Jacobi 场 U 必须满足 $I(U, U)=0$。

证明

$$\begin{aligned}I(U, U)&=\int_a^b(|\dot{U}|^2+\langle\ddot{U}, U\rangle)dt\\&=\int_a^b(|\dot{U}|^2+\langle\dot{U},U\rangle'-|\dot{U}|^2)dt\\&=\langle\dot{U},U\rangle|_a^b=0.\end{aligned}$$

证毕。

于是如 $\gamma(b)$ 共轭于 $\gamma(a)$，则指标形式在 $\mathfrak{V}_1$ 上一定是**退化的**. 让我们进一步把 b 伸展开去，使得正规测地线

$$\gamma:[a, b] \to M$$

现在能包含 $\gamma(a)$ 的一个共轭点 $\gamma(c)$，此处 $a<c<b$. 于是我们期望：对某个 $Y \in \mathfrak{V}_0$，有 $I(Y, Y)<0$. 其理由如下. 由假设，沿 $\gamma|_{[a,c]}$ 存在一个非平凡的正常 Jacobi 场 J，使得 $J(a)=J(c)=0$. 设 $\{\bar{\gamma}_u\}$ 是一个单参数测地线族，其横截向量场为 J. 对充分小的 $u \neq 0$，因为 $J(c)=0$，所以 $\bar{\gamma}_u$ 是一条从 $\gamma(a)$ 出发，但最后到达 $\gamma(c)$ 的测地线（见图 7.1）. 粗糙地说，$\bar{\gamma}_u$ 具有与 $\gamma|_{[a,c]}$ 相同的长度. 设 ζ 为由 $\bar{\gamma}_u$ 及 $\gamma|_{[c,b]}$ 所合成的曲线. 粗略地说，ζ 具有与 γ 相同的长度，但 ζ 在 $\gamma(c)$ 处有角点，因此把 $\gamma(c)$ 处的角点弄圆滑后就能得到一条比 γ 更短的测地线 ξ. 于是 γ 即使在邻近曲线之中也不是最短的. 因此对 γ 的一个适当的变分，有 $L''(0)<0$. 所以由 (7.6) 知道，存在着某个 $Y \in \mathfrak{V}_0(a, b)$，使得

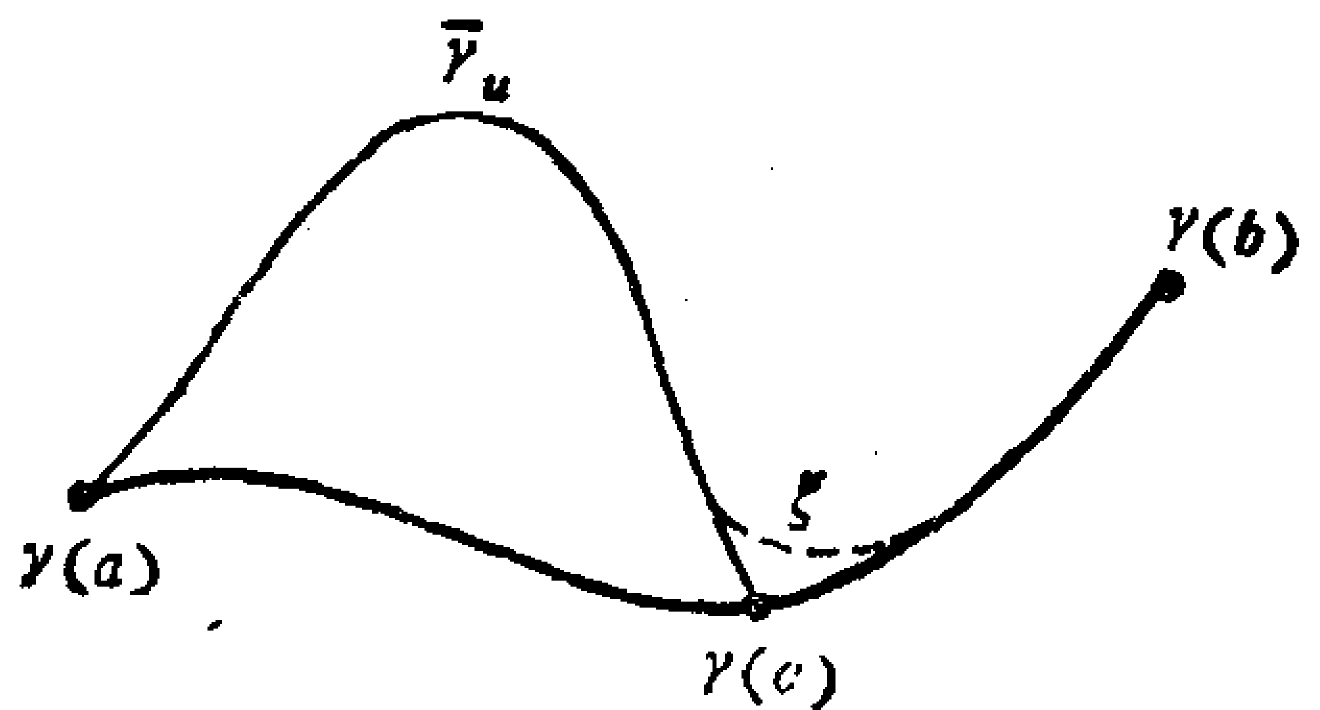


图 7.1

$$I(Y, Y)<0.$$

现在我们通过下面三个引理的证明，把上述思想赋以一个坚实的基础. 请注意：这些技术性的证明与前面所述的直观论证是十分接近的.

首先导入一个标准的术语：一条测地线 $\gamma:[a, b] \to M$ 被称为**不含共轭点**，如果 $\gamma(a)$ 沿 γ 无共轭点.

在下面三个引理中我们令 $\gamma:[a, b] \to M$ 是一条正规测地线.

引理 2 如 γ 不含共轭点，则指标形式在 $\mathfrak{V}_0(a, b)$ 上为正

定.

引理 3 假设 $\gamma(b)$ 共轭于 $\gamma(a)$，但对所有 $t\in(a, b)$，$\gamma(t)$ 与 $\gamma(a)$ 都不共轭，则指标形式在 $\mathfrak{V}_0(a, b)$ 上是半正定的，但不正定.

引理 4 $\gamma(a)$ 共轭于某个 $\gamma(c)$（其中 $a<c<b$）的充要条件是存在某个 $U\in\mathfrak{V}_0(a, b)$ 使得 $I(U, U)<0$.

引理 2 说，如果 γ 不含共轭点，则 γ 在邻近曲线中是最短的. 而引理 4 说，超过共轭点后，γ 即使在邻近曲线之中也决不是最短的. 由这些引理也可推出：如 γ 不含共轭点，则对 $[a, b]$ 中任何一个子区间 $[\alpha, \beta]$，$\gamma|_{[\alpha,\beta]}$ 也不含共轭点. 事实上，如有某个 $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$ $(\alpha<\beta)$，使得 $\gamma(\alpha)$ 与 $\gamma(\beta)$ 共轭，设 J 为沿 $\gamma|_{[\alpha,\beta]}$ 的使得 $J(\alpha)=J(\beta)=0$ 的非平凡的正常 Jacobi 场，通过在 $[a, \alpha]$ 及 $[\beta, b]$ 上令 J 为零后就可把 J 扩充成沿 γ 的一个向量场，于是 $J\in\mathfrak{V}_0(a, b)$. 为避免混淆，设 I_r^s 为沿测地线 $\gamma|_{[r,s]}$（$[r, s]\subset[a, b]$）的在 $\mathfrak{V}_0(r, s)$ 上的指标形式，则由引理 1，

$$
\begin{aligned}
I_a^b(J, J) &= I_a^\alpha(0, 0)+I_\alpha^\beta(J, J)+I_\beta^b(0, 0)\\
&= I_\alpha^\beta(J, J)=0.
\end{aligned}
$$

由引理 2，γ 必须包含共轭点，因此矛盾.

在给出引理 2—4 的证明之前再谈一点评论. 对指标形式进行工作要比直接对 γ 的变分 $\{\gamma_u\}$ 做起来方便的原因是，由于前者是一个**线性**物，而后者却不是. 例如在下面的 Bonnet-Myers 定理的证明之中，为了找出一个特别的（局域的）正常变分 $\{\gamma_u\}$，使得

$$L(\gamma_u)<L(\gamma),\quad \forall u\neq 0,$$

我们只需要沿 γ 造出一族向量场 $\{X_i\}$，使得

$$\sum_i I(X_i, X_i)<0.$$

这是很容易的，而且本质上这是一个代数问题.

引理 2—4 的证明依赖于关于指标形式的一个恒等式。设 $X, Y \in \mathfrak{V}$，使得 X 在 $[a, b]$ 上是 C^∞（而不只是逐段 C^∞），则

$$I(X, Y) = \langle \dot{X}(t), Y(t)\rangle\Big|_a^b - \int_a^b \langle \ddot{X}(t) + R_{\dot\gamma(t)X(t)}\dot\gamma(t), Y(t)\rangle \mathrm{d}t. \tag{7.7}$$

这可以从 (7.5) 出发，利用下列事实：在 $[a, b]$ 的每一个使 Y 为 C^∞ 的子区间上，我们有

$$\langle \dot X, \dot Y\rangle = \langle \dot X, Y\rangle' - \langle \ddot X, Y\rangle$$

就可得出。一般地，假设 X 是逐段 C^∞，设 $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1} = b$ 为 $[a, b]$ 的一个分割，使得在每一个 $[a_i, a_{i+1}]$ 上 X 是一个 C^∞ 向量场。用 X_i 表示 X 在 $[a_i, a_{i+1}]$ 上的限制，于是从 (7.7) 我们得到

$$I(X, Y) = \sum_{i=0}^{k} \langle \dot X_i(t), Y(t)\rangle\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} - \sum_{i=0}^{k}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \ddot X_i + R_{\dot\gamma X_i}\dot\gamma, Y\rangle \mathrm{d}t. \tag{7.8}$$

下面的引理指出：在 $\mathfrak{V}_0$ 上的指标形式的零空间正好是 $\mathfrak{V}_0$ 中的 Jacobi 场（回忆：向量空间 W 上一个对称双线性形式 β 的零空间是指满足 $\beta(w, W) = 0$ 的所有 $w \in W$ 的集合）。

引理 5 设 $\gamma:[a, b] \to M$ 为一条正规测地线，且设

$$\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}_0(a, b),$$

则对 $U \in \mathfrak{V}(a, b)$ 满足 $I(U, \mathfrak{V}_0) = 0$ 的充要条件是 U 为 Jacobi 场。

证明 充分性得自(7.7)。反之，假设 $I(U, \mathfrak{V}_0) = 0$。设 f 为 $[a, b]$ 上的一个 C^∞ 函数，使得

$$f(a_i) = 0, \quad \forall i = 0, \cdots, k+1,$$

而且在其它部分 $f > 0$。在(7.8)中令 $X = U$，$Y = f(\ddot U + R_{\dot\gamma U}\dot\gamma)$。注意 Y 是被合理地定义的，且属于 $\mathfrak{V}_0$。于是

$$0 = I(U,Y) = -\sum_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)|\ddot{U}_i + R_{\dot{\gamma}U_i}\dot{\gamma}|^2 dt.$$

因而在每个 $[a_i, a_{i+1}]$ 上有 $\ddot{U}_i + R_{\dot{\gamma}U_i}\dot{\gamma} = 0$。

其次，固定一个 j，且令 $Y \in \mathfrak{V}_0$ 满足

$$\begin{cases} Y(a_i) = 0, & \forall i \neq j, \\ Y(a_j) = \dot{U}_{j+1}(a_j) - \dot{U}_j(a_j). \end{cases}$$

于是 $0 = I(U, Y) = -|\dot{U}_{j+1}(a_j) - \dot{U}_j(a_j)|^2$。因此 U 是沿 γ 的一个 C^1 向量场，而且在每个 $[a_i, a_{i+1}]$ 中，它是 Jacobi 场。由 Jacobi 场关于预定初始条件的唯一性（§5 的引理 1），U 必须为 $[a, b]$ 上的 Jacobi 场。证毕。

引理 2 的证明 设 $X \in \mathfrak{V}_0(a,b) \equiv \mathfrak{V}_0$，我们必须证明

$$I(X, X) > 0.$$

不失一般性，我们可假设正规测地线 γ 定义在 $[0, b]$ 上。设 $x = \gamma(0)$，且令 $\tilde{\gamma}:[0, b] \to M_x$ 为 M_x 中由 $\tilde{\gamma}(t) = t\dot{\gamma}(0)$ 所定义的径向线。由假设 $d\exp_x$ 在 $\tilde{\gamma}$ 上非异，于是在 M_x 中存在着 $\tilde{\gamma}([0, b])$ 的一个邻域 $\mathscr{U}$，使得 $\exp_x: \mathscr{U} \to M$ 为一个浸入。现在我们可以看到

如 $\sigma:[0, b] \to \exp_x \mathscr{U}$ 是 $\exp \mathscr{U}$ 中连接 x 至 $\gamma(b)$ 的任何逐段 C^∞ 曲线，则有 $L(\sigma) \geqslant L(\gamma)$。等号成立的充要条件是 σ 为 γ 的一个单调的重新参数化。 (7.9)

其证明与 §3 中的定理 2 的证明恒同。特别地，设 $\{\gamma_u\}(-\varepsilon \leqslant u \leqslant \varepsilon)$ 为 γ 的一个变分，通过取 ε 充分小，我们可假设每一个 γ_u 位于 $\exp_x\mathscr{U}$ 中，所以由 (7.9) 知 $L(\gamma_u) \geqslant L(\gamma)$，或者用通常的记号写为 $L(u) \geqslant L(0)$。因为 L 是一个 C^∞ 函数，所以

$$L''(0) = \lim_{s \to 0} \frac{L(-s) + L(s) - 2L(0)}{s^2},$$

故得 $L''(0) = 0$。于是由 (7.6) 得知，对每一个 $X \in \mathfrak{V}_0$，有 $I(X,$

$X) \geqslant 0$。我们需要证明：除非 $X=0$，严格的不等式必须成立。为此，令 $Y\in\mathfrak{V}_0$，则对任何 $\varepsilon>0$，有

$$0\leqslant I(X-\varepsilon Y, X-\varepsilon Y)=I(X,X)$$
$$-2\varepsilon I(X,Y)+\varepsilon^2 I(Y,Y).$$

如 $I(X,X)=0$，则对任何 $\varepsilon>0$ 及任何 $Y\in\mathfrak{V}_0$，有

$$0\leqslant -2I(X,Y)+\varepsilon I(Y,Y).$$

令 $\varepsilon\to 0$，我们得到 $I(X,Y)\leqslant 0$，$\forall Y\in\mathfrak{V}_0$。同样可对 $X+\varepsilon Y$ 进行讨论，并得出

$$I(X,Y)\geqslant 0,\quad \forall Y\in\mathfrak{V}_0.$$

于是得到

$$I(X,Y)=0,\quad \forall Y\in\mathfrak{V}_0.$$

由引理 5，X 是一个 Jacobi 场。因为 $X\in\mathfrak{V}_0$，所以

$$X(0)=X(b)=0.$$

但 $\gamma(0)$ 不共轭于 $\gamma(b)$，故有 $X\equiv 0$。证毕。

引理 2 的下列推论在应用中极为重要，因此我们把它写成引理的形式。

引理 6 (Jacobi 场的极小性) 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条正规测地线，它不含共轭点。如 $X,U\in\mathfrak{V}(a,b)$，使得 $X(a)=U(a)$，$X(b)=U(b)$，且 U 为 Jacobi 场，则有

$$I(U,U)\leqslant I(X,X),$$

等号成立的充要条件是 $X=U$。

证明 因为 $U-X\in\mathfrak{V}_0(a,b)$，由引理 2 及(7.7)可得

$$0\leqslant I(U-X,U-X)=I(U,U)-2I(U,X)+I(X,X)$$

$$=\langle\dot U,U\rangle|_a^b-2\langle\dot U,X\rangle|_a^b+I(X,X)$$

$$=-\langle\dot U,U\rangle|_a^b+I(X,X)=-I(U,U)+I(X,X).$$

再一次利用引理 2 就得到了 $0=-I(U,U)+I(X,X)$ 的充要条件是

$$U - X = 0.$$

证毕.

注记. 显然从引理 6 又可推出引理 2，于是两者等价. 在标准的处理中，人们一般先用复杂的计算去证明引理 6，然后作为推论，得出引理 2. 现在的方法(取自 [GKM] 的 §4.5) 似乎更好一些.

引理 3 的证明 我们仍然假设正规测地线 γ 是定义在 $[0, b]$ 上. 设 $X \in \mathfrak{B}_0(a, b)$，且我们必须在 $\gamma(b)$ 是 $\gamma(0)$ 沿 γ 的唯一的共轭点的假设下证明 $I(X, X) \geqslant 0$. 取 $\beta \in [0, b]$，且设 $\bar{X} \in \mathfrak{B}_0(0, \beta)$. 令 I_β 为定义在 $\mathfrak{B}_0(0, \beta)$ 上的指标形式. 由引理 2 知，对任何 $\bar{X} \in \mathfrak{B}_0(0, \beta)$ 有 $I_\beta(\bar{X}, \bar{X}) \geqslant 0$. 当 $\beta \to b$ 时我们从直观上应当得到

$$I(X, X) \geqslant 0, \quad \forall X \in \mathfrak{B}_0(0, b).$$

我们能精确地去证明这一结论. 沿 γ 先取定一个平行标架场 $\{E_1(t), \cdots, E_n(t)\}$，使得 $E_1(t) = \dot{\gamma}(t)$. 设 $X \in \mathfrak{B}_0(0, b)$，并记

$$X(t) = \sum_{i=2}^{n} f_i(t) E_i(t).$$

令

$$\tau(X)(t) \equiv \sum_{i=2}^{n} f_i\left(\frac{b}{\beta} t\right) E_i\left(\frac{b}{\beta} t\right).$$

再注意到确实有 $\tau(X) \in \mathfrak{B}_0(0, \beta)$，于是得到了一个映射

$$\tau: \mathfrak{B}_0(0, b) \to \mathfrak{B}_0(0, \beta).$$

现在可直接验证：当 $\beta \to b$ 时，

$$I_\beta(\tau(X), \tau(X)) \to I(X, X).$$

由引理 2，$I_\beta(\tau(X), \tau(X)) \geqslant 0$，所以 $I(X, X) \geqslant 0$. 证毕.

引理 4 的证明 此证明完全是模仿引理 1 证明后的那段直观的讨论. 假设 $\gamma(a)$ 共轭于 $\gamma(c)$，设 $J_1(t)$ 为沿 γ 的一个非平凡的正常的 Jacobi 场，使得 $J_1(a) = J_1(c) = 0$. 定义 $J \in \mathfrak{B}_0(a, b)$，使得在 $[a, c]$ 上有 $J = J_1$，而在 $[c, b]$ 上有 $J(t) \equiv 0$. 现在

用 I_α^β 表示 $\gamma|_{[\alpha,\beta]}$ 在 $\mathfrak{V}(\alpha,\beta)$ 上的指标形式，这里 $[\alpha,\beta]$ 是 $[a,b]$ 的任意子区间；为简单起见，我们继续用 I 表示 I_a^b。则由引理 5，有

$$I(J,J)=I_a^c(J_1,J_1)+I_c^b(0,0)=0. \tag{7.10}$$

为了证明引理 4，我们还需要下面有用的一个事实：

引理 7 假设 $\gamma: [0,b]\to M$ 为一条测地线，使得 $\gamma(b)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点，则给定任何 $v\in M_{\gamma(b)}$，存在沿 γ 的唯一的 Jacobi 场 U，使得 $U(0)=0$ 及 $U(b)=v$。

引理 7 的证明 可以通过直接找出以基曲线 γ 的单参数测地线族，使得其横截向量场正好是所需要的 U 来证明引理 7(参看 §4 中关于单参数测地线族的定义及 §5 中引理 2 的证明)。或者我们采取间接的论证方法。设 A 是所有沿 γ 的，使在参数为零时是零向量的 Jacobi 场所构成的向量空间。从常微分方程解的唯一性(§5，引理 1 的(1))知道，由 $X\longmapsto \dot{X}(0)$ 所定义的线性映射 $A\to M_{\gamma(0)}$ 是一个同构。所以 $\dim A=n$ $(n=\dim M)$。现考虑由 $X\longmapsto X(b)$ 所定义的线性映射 $\varphi: A\to M_{\gamma(b)}$，它是单的，这是因为由 $X_1(b)=X_2(b)$ 知 $(X_1-X_2)(b)=0$，所以 X_1-X_2 为在 0 及 b 处都为零的 Jacobi 场。因为 $\gamma(b)$ 不共轭于 $\gamma(0)$，于是 $X_1-X_2\equiv 0$。再根据维数上的理由可知 φ 是满的，所以 φ 是一个同构。证毕。

现在继续证明引理 4。由 §3 的引理 1，设 $\delta>0$ 充分小，使得在 $M_{\gamma(c+\delta)}$ 中半径为 3δ 的球内，$\exp_{\gamma(c+\delta)}$ 为微分同胚。所以 $\gamma(c-\delta)$ 不共轭于 $\gamma(c+\delta)$。于是由引理 7 知道存在着沿 $\gamma|_{[c-\delta,c+\delta]}$ 的一个 Jacobi 场 V，使得 $V(c-\delta)=J(c-\delta)$ 及

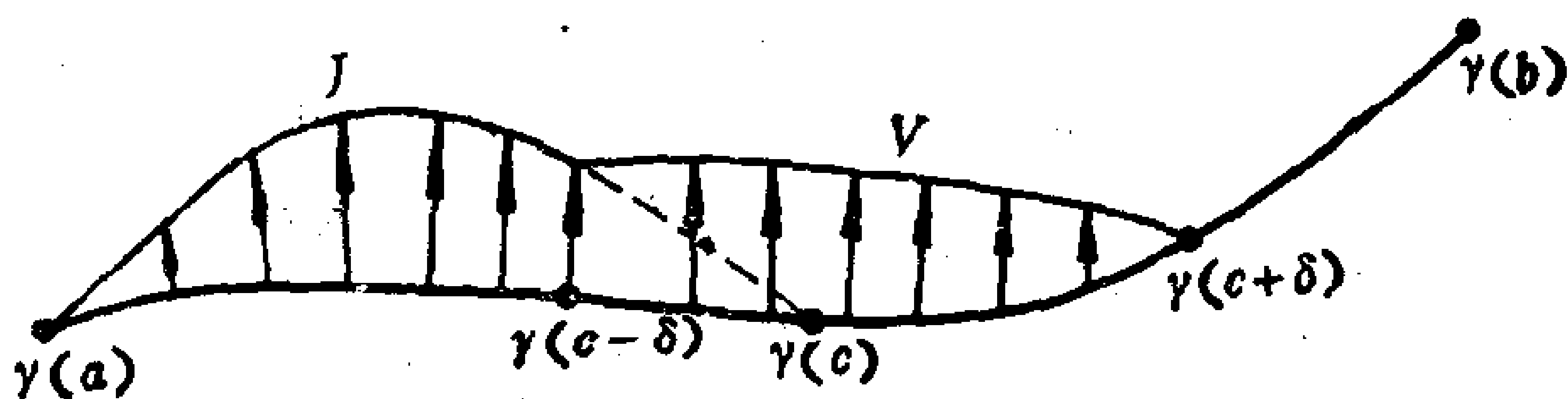


图 7.2

$V(c+\delta)=0$ (图 7.2)。现定义沿 γ 的一个向量场 U 为

$$U(t)=\begin{cases}J_1(t), & t\in[a, c-\delta],\\ V(t), & t\in[c-\delta, c+\delta],\\ 0, & t\in[c+\delta, b].\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} I(U, U) &= I_a^{c-\delta}(J_1, J_1)+I_{c-\delta}^{c+\delta}(V, V)+I_{c+\delta}^{b}(0, 0)\\ &< I_a^{c-\delta}(J, J)+I_{c-\delta}^{c+\delta}(J, J) \qquad \text{(由引理 6)}\\ &= I(J, J)=0. \qquad \text{(由(7.9))}\end{aligned}$$

进而，由定义知 $J_1(t)\perp\dot{\gamma}(t)$，且由 §5 的引理 4 知 $V(t)\perp\dot{\gamma}(t)$，故

$$U(t)\perp\dot{\gamma}(t), \quad \forall t.$$

于是有 $U\in\mathfrak{V}_0(a, b)$。

反之，如对 $U\in\mathfrak{V}_0(a, b)$ 有 $I(U, U)<0$，则由引理 2,3 知道在 $\gamma([a, b])$ 中必存在 $\gamma(a)$ 的一个共轭点. 证毕.

现在我们可以去证明下列的 Bonnet-Myers 定理 (Bonnet 在 1855 年对 $n=2$ 证明了这个定理，一般情形是由 Myers 在 1941 年利用相同的思想证明的). 首先回忆：度量空间的**直径** $d(M)$ 被定义为数 $\sup\limits_{x,y\in M} d(x, y)$。

定理 8 (Bonnet-Myers) 设 M 是 n 维完备黎曼流形，使得 Ricci 曲率有一个正常数的下界，则 M 为紧致. 进而，如记 Ricci 曲率的下界为 $(n-1)c(c>0)$，则

$$d(M)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

为了理解这个定理，我们首先应看一下 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的球面. 因为单位球面 S^n 是常截面曲率为 1，它的 Ricci 曲率为 $n-1$(见 §2 末)，这时 $d(S^n)=\pi$. 一般地，设 $S^n(1/\sqrt{c})$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中半径 $1/\sqrt{c}$ 的球面，由 $\phi(x)=x/\sqrt{c}$ 所给出的微分同胚

$$\phi: S^n\to S^n(1/\sqrt{c})$$

把$S^n(1/\sqrt{c})$上的度量拉回到S^n上的黎曼度量，它是在S^n上度量的$1/c$倍. 由(4.1)我们推出：在$S^n(1/\sqrt{c})$上，Ricci 曲率$\equiv(n-1)c$，且$d(S^n(1/\sqrt{c}))=\pi/\sqrt{c}$. 一方面，这表明定理8中最后的结论是最优的. 另一方面，它描绘了一个图景，使我们看出（特别按§4中讨论的观点）为什么定理8应当是正确的. 在球面$S^n(1/\sqrt{c})$上，所有从x_0点出发的测地线在经过了距离$\pi/\sqrt{c}$后被聚到一起，即坍缩于对径点$-x_0$. 所以当我们假设M有 Ricci 曲率$\geq(n-1)c$时（因而在某种模糊的意义下，比$S^n(1/\sqrt{c})$有"更多"的曲率），M中从点$x\in M$出发的测地线将聚在一起的程度甚至比在$S^n(1/\sqrt{c})$时更厉害，因此直径将不超过$\pi/\sqrt{c}$. 这建议了我们应当试着以更精确的方式去理解测地线在S^n上坍缩的机制.

因为S^2在S^n中全测地（见§4），我们把注意力限制在S^2上. 设$\gamma:[0,b]\to S^2$是一条正规测地线，不妨令$\gamma(0)$为北极$(0,0,1)$. 我们先来确定沿γ的正常 Jacobi 场. 设W是沿γ的一个单位平行向量场，使得对每一个t有$W(t)\perp\dot\gamma(t)$. 设X为沿γ满足$X(t)\perp\dot\gamma(t)$及$X(0)=0$的任何逐段C^∞向量场，于是我们可以记

$$X(t)=f(t)W(t),$$

这里$f:[0,b]\to\boldsymbol{R}$为一个满足$f(0)=0$的任意的逐段C^∞函数. 如X是一个 Jacobi 场，于是

$$\begin{cases}f''+f=0,\\ f(0)=0\quad 及\quad f'(0)\neq 0,\end{cases}$$

其解为$f(t)=a\sin t$，这里$a\in\boldsymbol{R}$. 因为对$t>0$，$f(t)=0$的充要条件为$t=k\pi$，其中k为一个正整数，所以$\gamma(0)$沿γ的第一共轭点发生在$\gamma(\pi)=(0,0,-1)$处.

现在假设$b<\pi$. 则$\gamma:[0,b]\to S^2$上没有共轭点，且由引理2，在$\mathfrak{V}_0(0,b)$上的指标形式为正定，所以对任何非零的$X\in\mathfrak{V}_0(0,b)$，有

$$0 < I(X, X) = \int_0^b \{|\dot{X}|^2 - \langle R_{\dot\gamma X}\dot\gamma, X\rangle\}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^b \{(f')^2 - f^2\}.$$

顺带地，我们得到了一个有趣的不等式，即如 $b < \pi$ 及 $f:[0,b] \to \mathbf{R}$ 为任何满足 $f(0) = f(b) = 0$ 的逐段 C^∞ 函数，则有

$$\int_0^b (f')^2 > \int_0^b f^2. \tag{7.11}$$

现在令 $b > \pi$，则 $\gamma:[0,b] \to S^7$ 就包含一个共轭点 $\gamma(\pi)$，$0 < \pi < b$。由引理 4，存在 $X_0 \in \mathfrak{V}_0(0, b)$，使得 $I(X_0, X_0) < 0$。记

$$X_0(t) = f_0(t)W(t),$$

我们有

$$\int_0^b \{(f_0')^2 - f_0^2\} < 0.$$

因而我们已证明了：如 $b > \pi$，则存在一个逐段 C^∞ 函数 $f_0:[0, b] \to \mathbf{R}$，它满足

$$\begin{cases} f_0(0) = f_0(b) = 0, \\ \int_0^b \{(f_0')^2 - f_0^2\} < 0. \end{cases} \tag{7.12}$$

通过前面的讨论，我们能预期：如M适合定理 8 的假设，且 $c = 1$，及 $\gamma:[0, b] \to M$ 为一条正规测地线，其中 $b > \pi$，则沿 γ 与 $f_0(t)W(t)$ 很"相似"的向量场 X' 将适合 $I(X', X') < 0$。我们将要证明这一点。

定理 8 的证明　通过对M的黎曼度量乘以$1/c$，并且利用(4.1)，我们可以假设 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)$。我们将证明 $d(M) \leqslant \pi$。于是M为闭的、有界的，因而是紧致的（Hopf-Rinow 定理，§3 的定理 6 的(4)）。

设 $x, y \in M$，且设 $\gamma:[0, b] \to M$ 为一条连接 x 到 y 的正规的最短的测地线(§3 的推论 7)。这只需证明 $b \leqslant \pi$ 就行了，因为

$d(x, y) = L(\gamma) = b \leqslant \pi$. 用反证法,如果 $b > \pi$,设 $\{E_1(t), \cdots, E_n(t)\}$ 为沿 γ 的一组平行标架场(即 $\langle E_i(t), E_j(t)\rangle = \delta_{ij}$),且使得 $E_1(t) = \dot{\gamma}(t)$. 对 $i = 2, \cdots, n$, 定义沿 γ 的向量场为 $X_i(t) = f_0(t)E_i(t)$, 这里 f_0 是满足 (7.11) 的任意函数. 于是每个 $X_i \in \mathfrak{V}_0(0, b)$, 且有

$$\sum_{i=2}^{n} I(X_i, X_i) = \int_0^b \{(n-1)(f_0')^2 - f_0^2 \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\}dt$$

$$\leqslant (n-1)\int_0^b \{(f_0')^2 - f_0^2\}dt < 0.$$

所以必存在某个 j, $2 \leqslant j \leqslant n$, 使得 $I(X_j, X_j) < 0$. 由(7.6)知, γ 不可能是最短的,所以引起矛盾. 证毕.

注记 1. 从前面的证明中显然可以看到定理 8 的假设能减弱成: 存在 $x_0 \in M$, 使得对任意从 x_0 出发的正规测地线 γ, 有 $\operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \geqslant (n-1)c$, 其中 $c > 0$. 即使减弱成这样, 它也不是一个必要的假设, 这样做仅仅是为了保证当 b 取为大于某个数值,而且 f_0 是某一个在 0 及 b 处为零的精选函数时,积分

$$\int_0^b \{(n-1)(f_0')^2 - f_0^2 \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\}dt$$

的负性. 事实上只需假设函数 $t \longmapsto \operatorname{Ric}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$ 是(粗糙地)以 $1/t^2$ 作为其下界,就能够保证上述积分的负性(这里再一次出现了指数幂"2", 见 §4 的开始部分). 这在 [C1] 中小心地被处理了. 说得具体一点,[C1] 的主要定理蕴涵如下的结果: 设 M 为完备的黎曼流形, $x \in M$, $\rho(y) = d(x, y)$. 如果 $\forall y \in M$, 有

$$\operatorname{Ric}(y) \geqslant \frac{1}{(4-\varepsilon)(1+\rho(y)^2)},$$

其中 ε 为小于 4 的正数, 则 M 是紧致的. 最近 Cheeger-Gromov-Taylor 也证明了类似的结果 (见 [CGT] 的定理 4.8), 但不如 [C1] 精确.

注记 2. 从定理 8 前面的讨论中引起了一个自然的问题, 即

是否 $S^n(1/\sqrt{c})$ 是唯一满足 Ricci 曲率 $\geqslant (n-1)c$ 及直径等于 $\pi/\sqrt{c}$ 的紧致黎曼流形？回答是正确的，这将在 §11 中予以证明，并将讨论**最大直径定理**的较为复杂的历史.

但是我们能容易地证明定理 8 的一个推论．设M适合定理 8 的条件，且设 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 为M的万有覆盖空间．从 §6 中的定理 7 的证明中我们知道能使 $\widetilde{M}$ 成为一个 C^∞ 黎曼流形，而且 π 是一个局部等距．于是 $\widetilde{M}$ 同样满足定理 8 的假设，因而 $\widetilde{M}$ 是紧致的．因此 $\pi:\widetilde{M}\to M$ 是一个有限覆盖．要不然，对 $x\in M$，如 $\pi^{-1}(x)$ 是无限的，则 $\pi^{-1}(x)$ 将有一个聚点 $\tilde{x}$，这样，在 $\tilde{x}$ 处 π 就不是一个局部微分同胚，于是 $\pi_1(M)$ 是有限的．综上所述，有

推论 9 设M适合定理 8 的假设，于是M的基本群是有限的.

这个推论已被 Cheeger 及 Gromoll (见 [CG1]) 推广成：如M具有非负 Ricci 曲率的紧致黎曼流形，但在某一点处 Ricci 曲率为正，则M具有有限的基本群．这个推广要比推论 9 困难，而且从概念上看，这也是重要的．只要一个几何学的方程牵涉到正的曲率假设，我们就应当试着把正性减弱到非负性，并看看能减弱到什么程度（即试着用 $\geqslant 0$ 来代替 >0）．在**正**曲率与**非负**曲率之间的差异通常是一个天地之别的问题（见 §4 开始时关于 $S^2\times S^2$ 的讨论）.

最后还有一点评论．在**半单李群**的万有覆盖群也是紧致的（见 [H3] 中第二章定理 6.9）．由于用这样一个群的 Killing 形式所定义的黎曼度量确实满足定理 8 的假设，所以立即可得出 Weyl **定理**．这是 Bonnet-Myers 定理极有兴趣的应用之一.

习题 1. 能否将引理 2 推广为指标形式在 $\mathfrak{B}(a,b)$ 上是正定的？为什么？

习题 2. 假设 $\exp_x: M_x\to M$ 是 M_x 中半径为 δ 的球 $B(\delta)$ 上的一个微分同胚，ρ 是到 x 处的距离．注意，ρ^2 在 $\exp_x B(\delta)$ 上是 C^∞ 的．你能否证明在 $\exp_x B(\delta)$ 上 $D^2\rho^2>0$？为什么？

§8 Rauch, Hessian 与 Laplace 算子的比较定理

本节参考文献

[GKM], §6.3 与 §6.4, (§7.7, §7.8).

[CE], 第 29 至 35 页,(第二章 2.5, 2.6).

[GW3], §1 与 §2.

(上述文献条目中圆括号表示我们对号内专题一带而过.)

回忆前面的两个定理: Cartan-Hadamard 定理与 Bonnet-Myers 定理,可以看到它们有一个共同的特点. (1) 在 Cartan-Hadamard 定理中,我们用 $\boldsymbol{R}^n$ 作为模型证明: 如果用"曲率$\leqslant 0$"代替 $\boldsymbol{R}^n$ 的零曲率,这样的流形在微分同胚意义下依然和 $\boldsymbol{R}^n$ 一样. (2) 在 Bonnet-Myers 定理中, 我们用 S^n 作为模型证明: 如果用"Ricci 曲率$\geqslant(n-1)$"代替 S^n 的"Ricci 曲率 $=n-1$",这样的流形在紧致性上仍然和 S^n 相似. 在这两种情形中,都是从一个**模型空间**出发,将所论流形与模型空间作比较,力求得到结论. 迄今为止这类比较完全是定性的, 现在将证明三个最根本的比较定理,它们给出比较过程中定量的结果. 应该指出,在这三个比较定理中, Rauch **比较定理**发现得最早, 也是最基本的. Rauch 在 1951 年将一维的 Sturm **比较定理**做了一个不平凡的 n 维推广,从而发现了它. 这不但是一个大突破, 而且为所有以后发现的比较定理建立了证明的模式.

设有 n 维黎曼流形 M, $\widetilde{M}$ 以及两点 $x\in M$, $\tilde{x}\in\widetilde{M}$, 又有线性等距变换 $\varphi: M_x\to\widetilde{M}_{\tilde{x}}$. 设 $p\in M_x$,令 $\tilde{p}=\varphi(p)$, 并由 $\gamma(t)=\exp_x tp$, $\tilde{\gamma}(t)=\exp_{\tilde{x}}t\tilde{p}$ 确定两条测地线 $\gamma:[0,1]\to M$ 与 $\tilde{\gamma}:[0,

$1] \to \widetilde{M}$. 又设 $X \in (M_x)_p \equiv M_x$，令 $\widetilde{X} = d\varphi(X) \equiv \varphi(X)$，这里 $\widetilde{X} \in (\widetilde{M}_{\tilde{x}})_{\tilde{p}} \equiv \widetilde{M}_{\tilde{x}}$.

Rauch 比较定理 假设：(1) γ 不包含共轭点；(2) 对任意 $t \in [0, 1]$，$\widetilde{K}(t) \leqslant K(t)$，其中

$\widetilde{K}(t) = \max\{\widetilde{M}_{\tilde{\gamma}(t)}$ 中包含 $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ 的平面的截面曲率$\}$，

$K(t) = \min\{M_{\gamma(t)}$ 中包含 $\dot{\gamma}(t)$ 的平面的截面曲率$\}$，

则

$$|d \exp_{\tilde{x}} \widetilde{X}| \geqslant |d \exp_x X|.$$

注记 1. 由于 $d \exp_x$ 在半径方向总是一个等距(§3 引理 4)，故不妨假定在 M_x，$\widetilde{M}_{\tilde{x}}$ 中 $X \perp p$，$\widetilde{X} \perp \tilde{p}$)．采用 §5 中惯用的手法，以 Jacobi 场来描写 $d \exp_x X$．用 $\gamma_u(t) = \exp_x t(p + uX)$ 定义 γ 的变分 $\{\gamma_u\}$ (参单数测地线族)，令 $U(t)$ 是 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场在 γ 上的限制，那么 U 是沿 γ 的 Jacobi 场，$U(0) = 0$，$\dot{U}(0) = X$，$U(1) = d \exp_x X$．类似地用 $\tilde{\gamma}_u(t) = \exp_{\tilde{x}} t(\tilde{p} + u\widetilde{X})$ 定义 $\{\tilde{\gamma}_u\}$，相应地有 $\widetilde{U}(t)$，同样 $\widetilde{U}$ 是沿 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场，$\widetilde{U}(0) = 0$，$\dot{\widetilde{U}}(0) = \widetilde{X}$，$\widetilde{U}(1) = d \exp_{\tilde{x}} \widetilde{X}$．利用这些观察，我们可将 Rauch 比较定理复述如下：

Rauch′ 比较定理 设 $\gamma: [0, b] \to M$，$\tilde{\gamma}: [0, b] \to \widetilde{M}$ 皆是正规测地线，$\dim M = \dim \widetilde{M}$；又设 U，$\widetilde{U}$ 分别是沿 γ，$\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场，使得 $U(0) = \widetilde{U}(0) = 0$，$\dot{U}(0) \perp \dot{\gamma}(0)$，$\dot{\widetilde{U}}(0) \perp \dot{\tilde{\gamma}}(0)$，$|\dot{U}(0)| = |\dot{\widetilde{U}}(0)|$；再假设上一定理中(1)，(2) 成立 (将那里的 $[0,1]$ 换成 $[0, b]$)，则

$$|\widetilde{U}(t)| \geqslant |U(t)|, \quad \forall t \in [0, b].$$

注记 2. Rauch 定理中的假设 (1) 中可以换 $\gamma|[a, b]$ 为 $\gamma|_{[0,b]}$，使其上不包含共轭点，结论依然成立．因为这时的结论可用连续性得到．至于条件 $\dim M = \dim \widetilde{M}$ 可以减弱为 $\dim M \geqslant \dim \widetilde{M}$．此外，也还可以讨论 U，$\widetilde{U}$ 在 O 处不为零的情形．关于这些技术上的改进，可参阅 [W5]．

注记 3. 在 Rauch 比较定理中，当M是具平坦度量的$\boldsymbol{R}^n$，$\widetilde{M}$是非正截面曲率的完备黎曼流形时，便有

推论 1 如果M是非正截面曲率的完备黎曼流形，那么对任意 $x\in M$，$\exp_x:M_x\to M$ **是距离膨胀映射**，即

$$|\mathrm{d}\exp_x X|\geqslant|X|,\quad \forall X\in M_x.$$

这个推论加强了 Cartan-Hadamard 定理的(1)，并且它还有一个有趣的

推论 2 设M是一个非正截面曲率的单连通完备黎曼流形，设 ABC 是M中的**测地三角形**（即三角形的三边皆是**最短测地线**），其三内角分别是 A，B，C，对应的三边分别是 a，b，c（如图 8.1），则

(1) $a^2+b^2-2ab\cos C\leqslant c^2$;

(2) $A+B+C\leqslant\pi$.

此外，如果截面曲率严格负，那么上述不等式就是严格的(即等号不会成立).

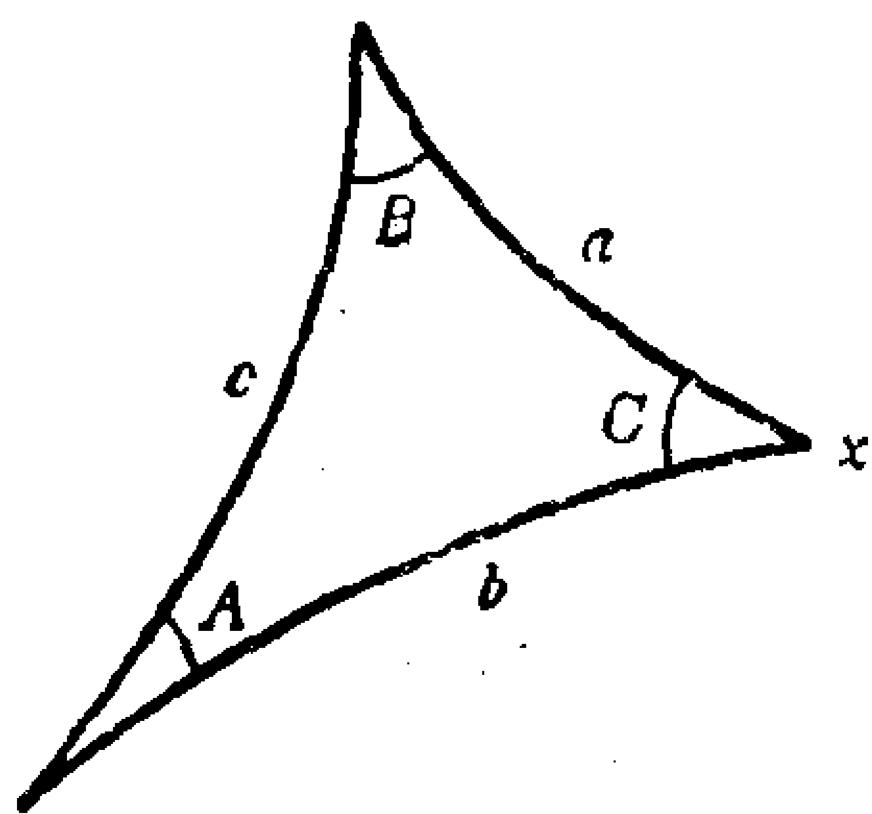


图 8.1

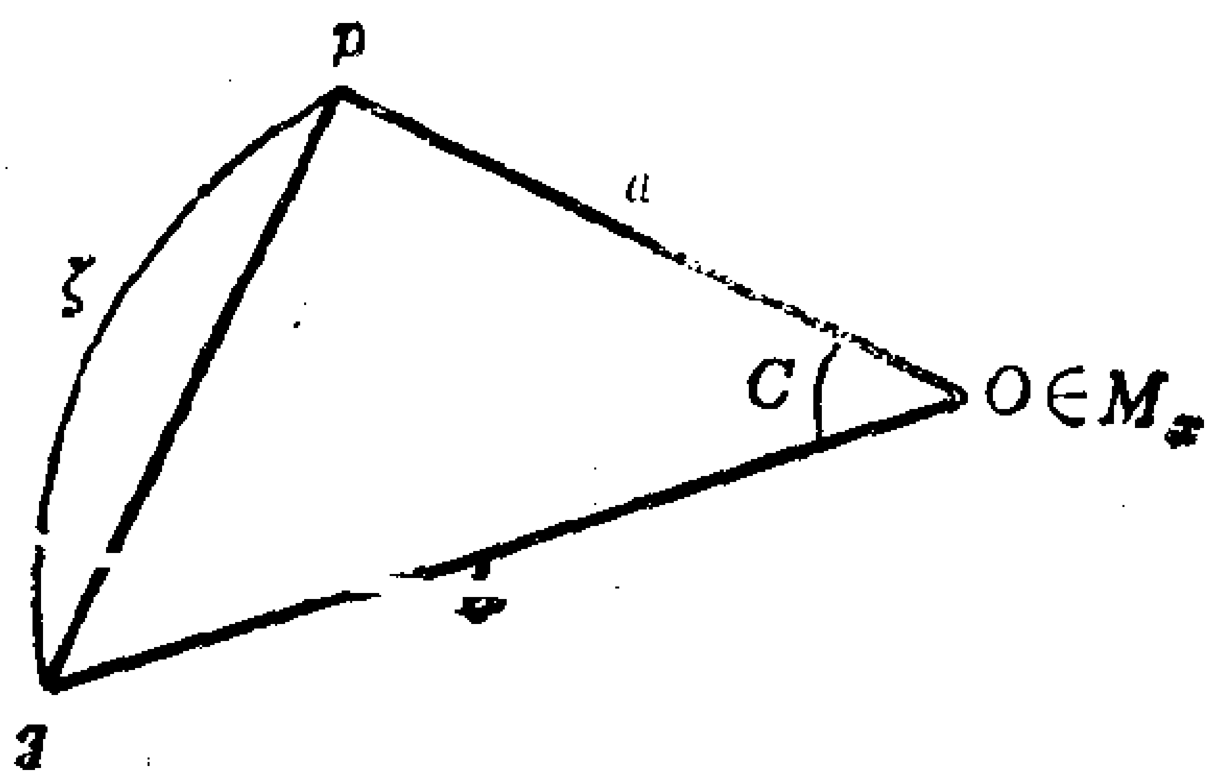


图 8.2

证明 设x是角C的顶点，在M_x中画图 8.2，取径向直线段$\overline{Op}$，$\overline{Oq}$分别具有长度 a，b，使得 $\exp_x$ 分别将 $\overline{Op}$，$\overline{Oq}$ 映为测地三角形的 a，b 两边. 令ζ是 c 边的 $\exp_x^{-1}$ 像. 由于 $\exp_x$ 是距离膨胀映射，故 $L(\zeta)\leqslant c$，所以M_x中直线段 $\overline{pq}$ 的长度 $L(\overline{pq})\leqslant L(\zeta)\leqslant c$. M_x 中三角形 Opq 的余弦定理是

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos C = L(\overline{pq})^2,$$

这样便证明了(1). 在 R^2 中造边界分别是 a, b, c 的三角形,这是可能的,因为测地三角形的边皆是最短测地线,所有两边长之和总不小于第三边. 令 R^2 中这个三角形的三角分别是 A', B', C'. 由(1)可知 $C \leqslant C'$. 同理 $B \leqslant B'$, $A \leqslant A'$, 于是(2)得证. 至于严格不等式的断言留作习题,请大家自证.

习题 1. 试证推论 2 中关于严格不等式的断言.

推论 2 是以后将说到的 Toponogov **三角形比较定理**(第 160 页)的特殊情形.

注记 4. Rauch 比较定理的结论蕴含: 如果测地线 γ 无共轭点,则 $\tilde{\gamma}$ 也无共轭点.我们知道半径为 c 的球面,它的曲率是$1/c^2$,长度小于 $c\pi$ 的测地线上无共轭点(见第 135 页), 因此有

推论 3 如果M是截面曲率 $\leqslant K$ 的完备黎曼流形, 那么对任意 $x \in M$ 和 $r < \pi/\sqrt{K}$, $\exp_x$: $B(r) \to M$ 是一个浸入,其中 $B(r)$ 是 M_x 中半径为 r 的实心开球.

这个推论中 $K \leqslant 0$ 的情形已包含在推论 1 中, 而现在对 $K > 0$ 也成立.

注记 5. Rauch 比较定理迄今为止最实质性的应用是证明**球面定理**. 关于球面定理的简单讨论将在这节末尾给出.

Rauch' **比较定理的证明** 在 $n = 2$ 时,证明最为清晰, 故先证之.

首先由 §5 引理 3 知 U, $\tilde{U}$ 是正常 Jacobi 场, 故若令 $W(t)$, $\widetilde{W}(t)$ 分别是沿 γ, $\tilde{\gamma}$ 的单位平移向量场,使得 $W \perp \dot{\gamma}$, $\widetilde{W} \perp \dot{\tilde{\gamma}}$, 则可写

$$U(t) = f(t)W(t), \quad \tilde{U}(t) = \tilde{f}(t)\widetilde{W}(t).$$

于是定理变为:

假定 f, $\tilde{f}$ 是 $[0, b]$ 上的函数,分别满足下列方程

$$\begin{cases} f'' + Kf = 0, \\ f(0) = 0, \ f'(0) = a > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{f}'' + \tilde{K}\tilde{f} = 0, \\ \tilde{f}(0) = 0, \ \tilde{f}'(0) = a > 0, \end{cases}$$

其中 $K, \tilde{K}$ 是 $[0, b]$ 上的函数并且

$$\tilde{K}(t) \leqslant K(t), \quad \forall t \in [0, b],$$

则在 $[0, b]$ 上只要 $f > 0$ 便有 $\tilde{f} \geqslant f$.

为证明此事,只消令 $\Phi(t) = (f\tilde{f}' - f'\tilde{f})(t)$. 可知: 当 $f, \tilde{f} \geqslant 0$ 时总有 $\Phi'(t) \geqslant 0$. 例如在 $[0, c]$ 中 $f, \tilde{f} \geqslant 0$. 由于 $\Phi(0) = 0$, 故

$$\Phi(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in [0, c].$$

假如有必要，稍稍缩小 c, 我们可假定在 $(0, c)$ 上 $f, \tilde{f} > 0$. 将 $\Phi \geqslant 0$ 改写为

$$\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}} \geqslant \frac{f'}{f}.$$

积分之可得

$$\log \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{f}(\varepsilon)} \geqslant \log \frac{f(t)}{f(\varepsilon)},$$

其中 $0 < \varepsilon < t < c$. 因此

$$\frac{\tilde{f}(t)}{f(t)} \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tilde{f}(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \frac{a}{a} = 1.$$

这样便有 $\tilde{f}(t) \geqslant f(t)$, $\forall t \in (0, c)$. 故显然在 $f \geqslant 0$ 的区间 $[0, b]$上 $\tilde{f} \geqslant f$.

注意: 上述证出的事实表明 f 的第一个零点出现在 $\tilde{f}$ 的第一个零点之前，这就是所谓的 Sturm **比较定理**. 因此 Rauch 比较定理即使在 2 维的情形也是 Sturm 比较定理的精密化.

在一般情形,令

$$f(t) = \langle U(t), U(t) \rangle, \quad \tilde{f}(t) = \langle \tilde{U}(t), \tilde{U}(t) \rangle.$$

我们希望证明 $\tilde{f}(b)\geqslant f(b)$. 在 2 维情形的证明中有了下列两式便可导出结论了:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{f}(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}=1, \tag{8.1}$$

$$\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}\geqslant\frac{f'}{f},\quad 在\ f,\tilde{f}>0\ 的任一区间[0,c]中. \tag{8.2}$$

证 (8.1) 是容易的. 用 L'Hospital 法则,当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$\frac{\tilde{f}(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\to\frac{\tilde{f}'(\varepsilon)}{f'(\varepsilon)}=\frac{\langle\dot{\tilde{U}}(\varepsilon),\tilde{U}(\varepsilon)\rangle}{\langle\dot{U}(\varepsilon),U(\varepsilon)\rangle}$$

$$=\frac{\left\langle\dot{\tilde{U}}(\varepsilon),\dfrac{\tilde{U}(\varepsilon)-\tilde{U}(0)}{\varepsilon}\right\rangle}{\left\langle\dot{U}(\varepsilon),\dfrac{U(\varepsilon)-U(0)}{\varepsilon}\right\rangle}\to\frac{|\dot{\tilde{U}}(0)|^2}{|\dot{U}(0)|^2}=1.$$

至于 (8.2) 的证明则比较费事,也更有意思. 这要用到 Jacobi 场的极小性质(§7 引理 6), 并且证明的主要想法还可以适用于以后的 Hessian 比较定理. 现在给出证明的关键事实.

引理 4 在 Rauch' 比较定理的假设下, 令 $J,\tilde{J}$分别是沿着 $\gamma,\tilde{\gamma}$ 的正常 Jacobi 场,使得 $J(0)=\tilde{J}(0)=0$ 及对某 $\beta\in[0,b]$, $|J(\beta)|=|\tilde{J}(\beta)|$, 则

$$\langle\dot{J}(\beta),J(\beta)\rangle\leqslant\langle\dot{\tilde{J}}(\beta),\tilde{J}(\beta)\rangle.$$

证明 令 $\{e_1(t),\cdots,e_n(t)\}$ 与$\{\tilde{e}_1(t),\cdots,\tilde{e}_n(t)\}$分别是沿着 $\gamma,\tilde{\gamma}$ 的平行幺正标架场,使得

$$J(\beta)=\alpha e_1(\beta),\quad \tilde{J}(\beta)=\alpha\tilde{e}_1(\beta),$$
$$e_n(t)=\dot{\gamma}(t),\quad \tilde{e}_n(t)=\dot{\tilde{\gamma}}(t).$$

于是

$$J(t)=\sum_{i=1}^{n-1}h_i(t)e_i(t),\quad \tilde{J}(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{h}_i(t)\tilde{e}_i(t).$$

现定义一个沿着 γ 的向量场 J_1如下:

$$J_1(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{h}_i(t) e_i(t)$$

(J_1 的构造与第 137 页 X_i 的构造类似). 由于 (7.7) 有

$$\langle \dot{J}(\beta), J(\beta) \rangle = I_0^\beta(J, J),$$

故证明本引理相当于证明

$$I_0^\beta(J, J) \leqslant I_0^\beta(\tilde{J}, \tilde{J}).$$

我们用 $I_0^\beta(J_1, J_1)$ 插在这个不等式中间. 由于

$$J(0) = J_1(0) = 0, \quad J(\beta) = J_1(\beta) = \alpha e_1(\beta),$$

故用 §7 的引理 6 (Jacobi 场的极小性质)有下列计算

$$\begin{aligned}
I_0^\beta(J, J) &\leqslant I_0^\beta(J_1, J_1) \\
&= \int_0^\beta \Big(|\dot{J}_1|^2 - \sum_i \tilde{h}_i^2 \langle R_{\dot{\gamma} e_i} \dot{\gamma}, e_i \rangle \Big) dt \\
&= \int_0^\beta \Big(|\dot{\tilde{J}}|^2 - \sum_i \tilde{h}_i^2 \langle R_{\dot{\gamma} e_i} \dot{\gamma}, e_i \rangle \Big) dt \\
&\leqslant \int_0^\beta \Big(|\dot{\tilde{J}}|^2 - \sum_i \tilde{h}_i^2(t) \cdot K(t) \Big) dt \\
&\leqslant \int_0^\beta \Big(|\dot{\tilde{J}}|^2 - \sum_i \tilde{h}_i^2(t) \cdot \tilde{K}(t) \Big) dt \\
&\leqslant \int_0^\beta \Big(|\dot{\tilde{J}}|^2 - \sum_i \tilde{h}_i^2 \langle \tilde{R}_{\dot{\tilde{\gamma}} \tilde{e}_i} \dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{e}_i \rangle \Big) dt \\
&= I_0^\beta(\tilde{J}, \tilde{J}).
\end{aligned}$$

这就证明了引理 4.

现在我们来证 (8.2) 以完成 Rauch' 比较定理的证明. 易见 (8.2) 就是

$$\frac{\langle \dot{U}(\beta), U(\beta) \rangle}{|U(\beta)|^2} \leqslant \frac{\langle \dot{\tilde{U}}(\beta), \tilde{U}(\beta) \rangle}{|\tilde{U}(\beta)|^2}, \quad \forall \beta \in (0, c) \quad (8.3)$$

在 $\gamma|_{[0,\beta]}$ 上定义一个 Jacobi 场 $J(t)$ 为

$$J(t) = \frac{1}{|U(\beta)|} U(t),$$

类似地令

$$\tilde{J}(t) = \frac{1}{|\tilde{U}(\beta)|}\tilde{U}(t).$$

对这里的 J, $\tilde{J}$ 用引理 4，即得(8.2)的证明.

例 在 Rauch' 比较定理中，如果 γ 包含共轭点，则结论不成立。这可从下面的例子看出. 令 $\tilde{M} = S^2(3)$，它是 $\boldsymbol{R}^3$ 中半径为 3 的球面；又令 $M = S^2(2)$. 设

$$\tilde{\gamma}:[0, 3\pi] \to S^2(3), \quad \gamma:[0, 3\pi] \to S^2(2)$$

是正规测地线. 令 $\tilde{U}$, U 分别是沿 $\tilde{\gamma}$, γ 的正常 Jacobi 场，使得

$$\tilde{U}(0) = 0, \quad |\dot{\tilde{U}}(0)| = 1,$$
$$U(0) = 0, \quad |\dot{U}(0)| = 1.$$

我们知道常曲率空间的正常 Jacobi 场是几乎平行的（见 §5 的习题4），取 $\tilde{W}$, W 分别是沿 $\tilde{\gamma}$, γ 的平行的单位向量场而且 $\tilde{W} \perp \dot{\tilde{\gamma}}$, $W \perp \dot{\gamma}$, 那么

$$\tilde{U}(t) = \tilde{f}(t)\tilde{W}(t), \quad U(t) = f(t)W(t).$$

可以具体求出 $\tilde{f}$, f. 当 $\tilde{W}$, W 取合适的方向后，解得

$$\tilde{f}(t) = 3\sin\frac{t}{3}, \quad f(t) = 2\sin\frac{t}{2},$$

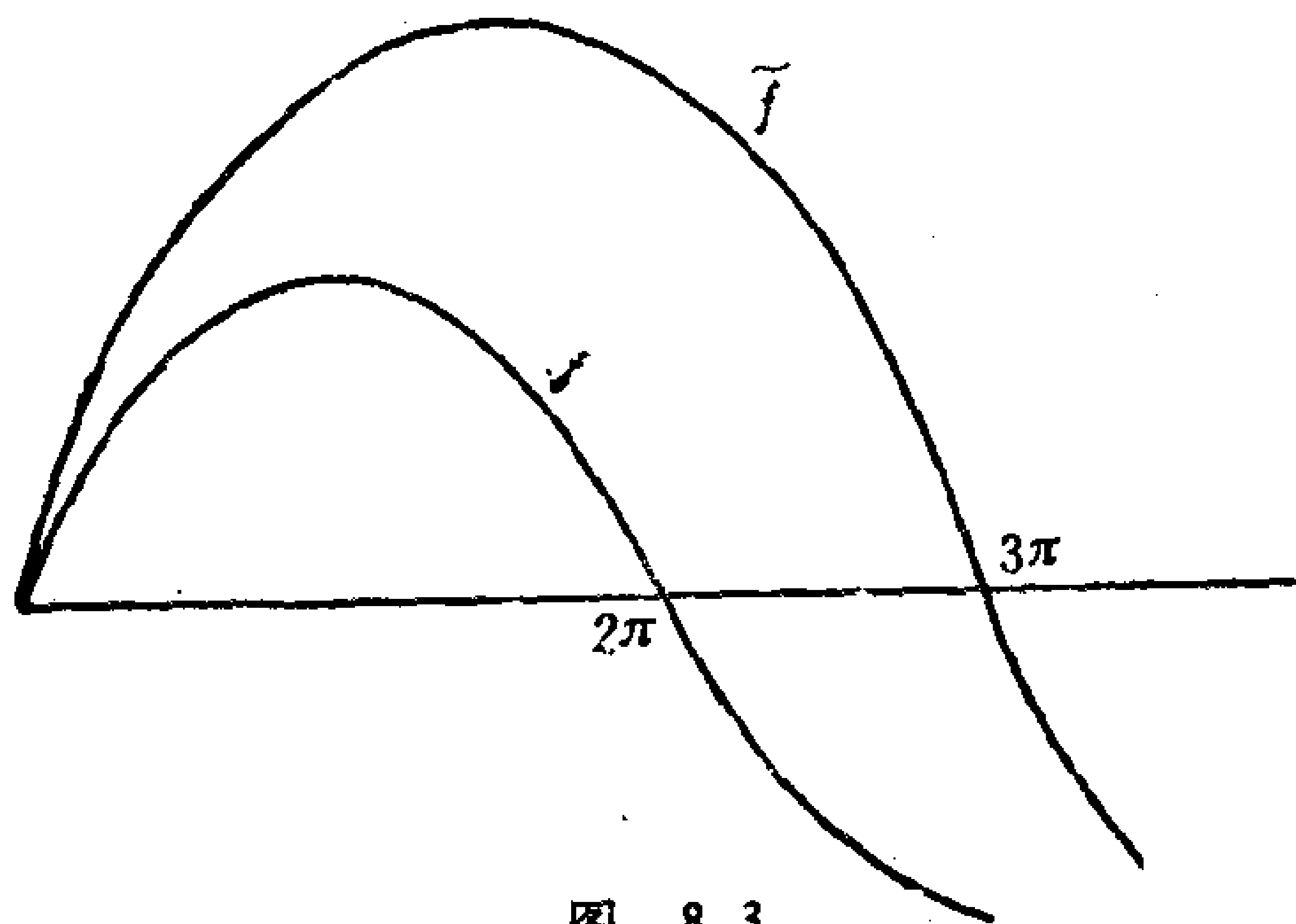


图 8.3

它们的图象如图 8.3. 由此可见，在 $[0, 2\pi]$ 上 γ 仅有一个共轭点 $\gamma(2\pi)$，此时确实有 $|\tilde{f}| \geqslant |f|$，即 $|\tilde{U}| \geqslant |U|$. 这正如 Rauch' 比较定理所断言的. 可是

$$|\tilde{U}(3\pi)| = \tilde{f}(3\pi) = 0 < 2 = |f(3\pi)| = |U(3\pi)|,$$

这与 Rauch' 比较定理的结论不同了，原因在于 γ 在 $(0, 3\pi)$ 中包

含共轭点 $\gamma(2\pi)$.

习题 2. 用 Rauch 比较定理重证 §5 中习题1(1). 当条件改为"包含 $\dot\gamma$ 的平面的截面曲率 $\geqslant\beta$"后,相应的结论是什么? 请证之.

现在我们来讨论另外两个典型的比较定理. 为了简化陈述,我们引入一个专用的定义,这个定义在别处是不用的,除非用它的一个等价而更熟知的形式. 一条测地线称为**是稳定最短的**, 如果所有靠近它的测地线皆是最短的. 精确地讲,设

$$\tilde\gamma:[0,b]\to M_{\gamma(0)}:\ t\longmapsto t\dot\gamma(0)$$

是径向直线段, $\gamma(0)=x$. 我们称 $\gamma=\exp_x\tilde\gamma$ 是稳定最短的,如果在 M_x 中存在一个 $\tilde\gamma$ 的扇形邻域

$$\mathscr{U}=\{tp:t\in[0,b],\ |p-\dot\gamma(0)|<\text{某常数}\},$$

使得在 $\mathscr{U}$ 中所有径向直线经 $\exp_x$ 映为M中从 x 出发的最短测地线. 在 §10 中我们将引进**割点与割迹**的概念, 从割迹的连续性(§10 的引理 5)易知: γ 是稳定最短的当且仅当 γ 上不包含 $\gamma(0)$ 沿 γ 的割点. 但是我们不打算现在就讨论割迹, 免得中断当前的介绍.

取定 $x\in M$,我们可以定义一个**距离函数** $\rho:M\to\boldsymbol{R}$ 如下: 对任意 $y\in M$, $\rho(y)=d(x,y)$. 易见函数 ρ 是连续的,但是它未必是可微的. 如果 $\gamma:[0,b]\to M$ 是一条正规稳定最短的测地线, 那么它便有一个邻域 $\exp_x\mathscr{U}$ (见上), 使得 $\exp_x:\mathscr{U}\to\exp_x\mathscr{U}$ 是微分同胚,而且

$$\rho(\exp_x z)=|z|,\quad \forall z\in\mathscr{U}.$$

于是在 $\exp_x\mathscr{U}-\{x\}$ 上 ρ 是 C^∞ 的. 现在我们在 $\exp_x\mathscr{U}-\{x\}$ 上定义一个**向量场** $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 如下: 对于任意 $\exp_x z\in\exp_x\mathscr{U}-\{x\}$, 有

$$\frac{z}{|z|}\in M_x\equiv(M_x)_z,$$

令

$$\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\exp_x z} = \mathrm{dexp}_x\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

由 $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 的定义显见

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\cdot\rho=1, \\ \left\langle\dfrac{\partial}{\partial\rho}, \dfrac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle=1.\end{cases} \tag{8.4}$$

用 ρ 与 $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 我们可以重述**高斯引理**(§3 的引理 4 与引理 5,§5 的引理 5)如下:

高斯引理 对 $\exp_x\mathscr{U}-\{x\}$ 中任意切向量 X,有

$$X\cdot\rho=\left\langle X, \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle.$$

证明 当 $X=\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 时,由(8.4)可知引理成立. 如果

$$\left\langle X, \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle=0,$$

由 §3 引理 5 可知: X 切于测地球面. 须知测地球面就是 ρ 的等值面,从而 $X\rho=0$. 这便证明了引理.

对于 $\exp_x\mathscr{U}-\{x\}$ 中可微函数 ρ,通常定义

$$D^2\rho(X, Y)=XY\rho-(D_XY)\rho,$$

其中 X,Y 是向量场. 从定义容易直接验证知: $D^2\rho(X, Y)$ 是 X, Y 的 $\mathscr{F}$ 线性函数并且

$$D^2\rho(X, Y)=D^2\rho(Y, X).$$

由此可知 $D^2\rho(X, Y)$ 在 y 点的值只与 $X(y)$, $Y(y)$ 有关.

引理 5 设 $\gamma:[0, b]\to M$ 是正规稳定最短测地线, J 是沿 γ 的正常 Jacobi 场,并且 $J(0)=0$, 则

$$D^2\rho(J(b), J(b))=\langle\dot{J}(b), J(b)\rangle.$$

证明 我们知道 Jacobi 场必可表为单参数测地线族的横截向量场．现在我们不采用 (5.4) 而是另寻别法构造单参数测地线族．令 $x=\gamma(0)$，M_x 中的单位球面记作 S．设

$$\sigma:[0,\varepsilon]\to S\cap\mathscr{U}$$

是一条曲线使得 $\sigma(0)=\dot\gamma(0)$．令 $\gamma_u(t)=\exp_x t\sigma(u)$，当 $\sigma(u)$ 取得合适就可保证 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场(在 γ 上限制)就是 J．令

$$\Gamma:[0,b]\times[0,\varepsilon]\to M:(t,u)\longmapsto\gamma_u(t),$$

$$T=\mathrm{d}\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad U=\mathrm{d}\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial u}\right),$$

于是

$$U(\gamma(t))=J(t),\quad T(\gamma(t))=\frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_{\gamma(t)}.$$

在 $\gamma(b)$ 处我们有下列计算，

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2\rho(J(b),J(b))&=UU\rho-(\mathrm{D}_UU)\rho\\
&=U\left\langle U,\frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle-\left\langle \mathrm{D}_UU,\frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle\\
&=U\langle U,T\rangle-\langle \mathrm{D}_UU,T\rangle\\
&=\langle \mathrm{D}_UU,T\rangle+\langle U,\mathrm{D}_UT\rangle-\langle \mathrm{D}_UU,T\rangle\\
&=\langle \mathrm{D}_UT,U\rangle=\langle \mathrm{D}_TU+[U,T],U\rangle\\
&=\langle \mathrm{D}_TU,U\rangle=\langle \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}J,J\rangle\\
&=\langle \dot J(b),J(b)\rangle.
\end{aligned}$$

在上面计算过程中我们用了高斯引理和 $[U,T]=0$，另外为书写简便，我们多次未标明函数应在 $\gamma(b)$ 点取值．证毕．

设 M，$\widetilde M$ 是 n 维黎曼流形，$\gamma:[0,b]\to M$，$\tilde\gamma:[0,b]\to\widetilde M$ 是正规测地线；又设 $x=\gamma(0)$，$\tilde x=\tilde\gamma(0)$．令 ρ，$\tilde\rho$ 分别是 M，$\widetilde M$ 中至 x，$\tilde x$ 的距离函数，又令

$$\widetilde K(t)=\max\{\widetilde M_{\tilde\gamma(t)}\text{ 中包含 }\dot{\tilde\gamma}(t)\text{ 的平面之截面曲率}\},$$

$$K(t)=\min\{M_{\gamma(t)}\text{ 中包含 }\dot\gamma(t)\text{ 的平面之截面曲率}\}.$$

Hessian 比较定理 假设：(1) γ 与 $\tilde{\gamma}$ 是稳定最短的；(2) $\widetilde{K}(t) \leqslant K(t)$，$\forall t$，则 ρ，$\tilde{\rho}$ 在 γ，$\tilde{\gamma}$ 附近是 C^∞ 的，并且沿着 γ，$\tilde{\gamma}$，$D^2\tilde{\rho} \succ D^2\rho$.

定理中记号"$D^2\tilde{\rho} \succ D^2\rho$"的解释：对于任意 $t \in [0, b]$ 和 $X \in M_{\gamma(t)}$，$\widetilde{X} \in \widetilde{M}_{\tilde{\gamma}(t)}$，只要 $|X| = |\widetilde{X}|$，$\langle X, \dot{\gamma}(t)\rangle = \langle \widetilde{X}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)\rangle$，就有

$$D^2\tilde{\rho}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) \geqslant D^2\rho(X, X).$$

Hessian 定理的证明 X 可唯一分解为

$$X = \langle X, \dot{\gamma}(t)\rangle \dot{\gamma}(t) + Y,$$

其中 $\langle Y, \dot{\gamma}(t)\rangle = 0$. 由于

$$D^2\rho(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \dot{\gamma}(t)\dot{\gamma}(t)\rho - (D_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t))\rho = 0,$$

$$\begin{aligned} D^2\rho(\dot{\gamma}(t), Y) &= \dot{\gamma}(t)Y\rho - (D_{\dot{\gamma}(t)}Y)\rho \\ &= \dot{\gamma}(t)\left\langle Y, \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle - \left\langle D_{\dot{\gamma}(t)}Y, \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle \\ &= \left\langle Y, D_{\dot{\gamma}(t)}\frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} D^2\rho\langle X, X\rangle = \langle X, \dot{\gamma}(t)\rangle^2 D^2\rho(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \\ + 2\langle X, \dot{\gamma}(t)\rangle D^2\rho(\dot{\gamma}(t), Y) \\ + D^2\rho(Y, Y) = D^2\rho(Y, Y). \end{aligned}$$

类似地有

$$\widetilde{X} = \langle \widetilde{X}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)\rangle \dot{\tilde{\gamma}}(t) + \widetilde{Y},$$

$$D^2\tilde{\rho}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) = D^2\tilde{\rho}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}).$$

因此欲证$D^2\tilde{\rho}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) \geqslant D^2\rho(X, X)$就相当于要证

$$D^2\tilde{\rho}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}) \geqslant D^2\rho(Y, Y). \tag{8.5}$$

此时

$$\langle Y, \dot{\gamma}(t)\rangle = 0 = \langle \widetilde{Y}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)\rangle,$$

$$|Y|^2 = |X - \langle X, \dot{\gamma}(t)\rangle \dot{\gamma}(t)|^2$$

$$= |X|^2 - \langle X, \dot{\gamma}(t)\rangle^2$$
$$= |\tilde{X}|^2 - \langle \tilde{X}, \dot{\tilde{\gamma}}(t)\rangle^2 = |\tilde{Y}|^2.$$

由于 γ, $\tilde{\gamma}$ 是稳定最短的，故其上无共轭点，利用 §7 引理 7 可分别沿 γ, $\tilde{\gamma}$ 造正常 Jacobi 场 J, $\tilde{J}$, 使得

$$J(t) = Y, \quad \tilde{J}(t) = \tilde{Y},$$

利用引理 5 和引理 4 立即可证得 (8.5). 证毕.

在给出 Hessian 比较定理的一些推论之前，我们先计算**常曲率空间**的 $D^2\rho$ (当然在稳定最短测地线的邻域内来算). 这主要利用引理 5，故先算初值为零的正常 Jacobi 场. §5 的习题 4 告诉我们，初值为零的正常 Jacobi 场是几乎平行的. 取 $E(t)$ 是沿测地线 $\gamma(t)$ 平行的单位向量场，那么要算的 Jacobi 场是 $J(t) = f(t)E(t)$, 其中 f 满足

$$\begin{cases} f'' + Kf = 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

因此解得

$$f(t) = \begin{cases} ct, & \text{当 } K = 0, \\ c\sin\sqrt{K}\,t, & \text{当 } K > 0, \\ c\sinh\sqrt{-K}\,t, & \text{当 } K < 0, \end{cases} \tag{8.6}$$

其中 c 是常数.

设 $\gamma:[0, b] \to M$ 是稳定最短的, $X \in M_{\gamma(b)}$, $X \perp \dot{\gamma}(b)$. 又设 $J(t)$ 是沿着 γ 的初值为零的正常 Jacobi 场并且 $J(b) = X$, 那么

$$|J(b)| = |f(b)| = |X|,$$
$$\langle \dot{J}(b), J(b)\rangle = \dot{f}(b)f(b) = \frac{\dot{f}(b)}{f(b)}|X|^2,$$

从而由引理 5 得

$$D^2\rho(X, X) = \frac{\dot{f}(b)}{f(b)}|X|^2.$$

对于一般的 $X\in M_{\gamma(b)}$，假定 γ 是正规的，那么有分解

$$X=\langle X,\dot\gamma(b)\rangle\dot\gamma(b)+Y,$$

故

$$\begin{aligned}D^2\rho(X,X)&=D^2\rho(Y,Y)=\frac{\dot f(b)}{f(b)}|Y|^2\\&=\frac{\dot f(b)}{f(b)}|X-\langle X,\dot\gamma(b)\rangle\dot\gamma(b)|^2\\&=\frac{\dot f(b)}{f(b)}\{\langle X,X\rangle-\langle X,\dot\gamma(b)\rangle^2\},\end{aligned}$$

即

$$D^2\rho(X,X)=\frac{\dot f(b)}{f(b)}\{\langle X,X\rangle-\langle X,\dot\gamma(b)\rangle^2\}.\qquad(8.7)$$

现在我们列出 Hessian 比较定理的一些推论。在这些推论中保留 Hessian 比较定理的假设，我们不再赘叙。

推论 6 若 $f:[0,b]\to\boldsymbol{R}$ 是一个 C^∞ 增函数(即 $f'\geqslant0$)，则沿着 γ 与 $\tilde\gamma$ 有

$$D^2f(\tilde\rho)\succ D^2f(\rho).$$

证明 由于

$$\begin{aligned}D^2f(\rho)(X,X)&=XXf(\rho)-(D_XX)f(\rho)\\&=f'(\rho)\{XX\rho-(D_XX)\rho\}+f''(\rho)(X\rho)^2\\&=f'(\rho)D^2\rho(X,X)+f''(\rho)\langle X,\dot\gamma(t)\rangle^2,\end{aligned}$$

故结论自明。

推论 7 对任意 $t\in(0,b]$，有 $\Delta\tilde\rho(\tilde\gamma(t))\geqslant\Delta\rho(\gamma(t))$。

证明 由于 $\Delta=\mathrm{tr}D^2$，故结论自明。

推论 8 设 M 是一个单连通黎曼流形，$x\in M$，ρ 是到 x 的距离函数。如果 M 的截面曲率 $\leqslant0$，则在 $M-\{x\}$ 中

$$\Delta\rho\geqslant\frac{n-1}{\rho},$$

$$D^2\rho^2\geqslant2g\quad(g\text{ 是 }M\text{ 的黎曼度量}).$$

又若 M 的截面曲率 $\leqslant-c^2$，则

$$\Delta\rho \geqslant (n-1)c\coth c\rho, \quad \Delta\rho^2 \geqslant 2 + 2(n-1)c\rho\coth c\rho.$$

证明 由于M的截面曲率$\leqslant 0$，从 Cartan-Hadamard 定理可知：M中任意测地线必是稳定最短的，因此可用 Hessian 比较定理。利用(8.6)，(8.7)算出截面曲率恒为零的流形有：

$$\Delta\rho = \frac{n-1}{\rho}, \quad D^2\rho^2 = 2g.$$

截面曲率为$-c^2$的流形有

$$\Delta\rho = (n-1)c\coth c\rho, \quad \Delta\rho^2 = 2 + 2(n-1)c\rho\coth c\rho.$$

从而证得推论 8。

注记 6. Hessian 比较定理的更要紧的应用可在[GW3]的 §5 与 §6 中找到。正如 Rauch 比较定理一样，这个定理也可有技术性改进，参阅 [K1]。

Laplace **算子比较定理** 设M，$\widetilde{M}$是n维黎曼流形，

$$\gamma:[0, b] \to M \text{ 与 } \tilde{\gamma}:[0, b] \to \widetilde{M}$$

是正规测地线，令$x = \gamma(0)$，$\tilde{x} = \tilde{\gamma}(0)$。$\rho$与$\tilde{\rho}$分别是$M$，$\widetilde{M}$中到$x$，$\tilde{x}$的距离函数；$M$，$\widetilde{M}$中的 Ricci 张量与 Laplace 算子分别记为 Ric，$\widetilde{\mathrm{Ric}}$，Δ，$\tilde{\Delta}$。假设：

(1) γ，$\tilde{\gamma}$皆是稳定最短的；

(2) 对任意$t \in [0, b]$，$\widetilde{\mathrm{Ric}}(\dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}})(t) \leqslant \mathrm{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t)$；

(3) $\widetilde{M}$是曲率为常数k的空间形式。

结论：

(1) $\tilde{\Delta}\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(t)) \geqslant \Delta\rho(\gamma(t))$，$\forall t \in (0, b]$；

(2) $\tilde{\Delta}\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(b)) = \Delta\rho(\gamma(b))$ 当且仅当对任意 $t \in [0, b]$，$M_{\gamma(t)}$中包含$\dot{\gamma}(t)$的平面之截面曲率是k，而且沿γ的每一初值为零的正常 Jacobi 场$J(t)$必可表为$f(t)E(t)$，其中$E(t)$是沿γ的平行向量场，$f:[0, b] \to \boldsymbol{R}$是下列方程

$$\begin{cases} f'' + kf = 0, \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

的一个解。

定理的证明及讨论 我们简记 Laplace 算子比较定理，Hessian 比较定理分别为 LCT，HCT. 因为 Ric，Δ分别是截面曲率与算子 D^2 的"平均"，故 LCT 可以认为是 HCT 的"平均"形式。从而自然期望 LCT 的证明相似于 HCT 的证明。实际上确实大致如此，但是不完全一样，以致我们要在 LCT 的假设中增加一个条件：$\tilde{M}$ 是一个空间形式，才能保证 HCT 的证明方法可以平移过来。这一点希望大家注意。我们知道 $\Delta = \mathrm{tr}D^2$，当取定 $M_{\gamma(b)}$ 中幺正标架 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 之后，

$$\Delta\rho(\gamma(b)) = \sum_{i=1}^{n} D^2\rho(e_i, e_i).$$

如果更令 $e_1 = \dot{\gamma}(b)$，那么由于

$$D^2\rho(e_1, e_1) = D^2\rho(\dot{\gamma}(b), \dot{\gamma}(b)) = 0,$$

故

$$\Delta\rho(\gamma(b)) = \sum_{i=2}^{n} D^2\rho(e_i, e_i).$$

接着仿照 HCT 的论证，选取沿 γ 的正常 Jacobi 场 U^i，$i = 2, \cdots, n$，使得 $U^i(0) = 0$，$U^i(b) = e_i$. 于是由引理 5 有

$$\Delta\rho(\gamma(b)) = \sum_{i=2}^{n} \langle \dot{U}^i(b), U^i(b)\rangle,$$

又由公式(7.7)得

$$\Delta\rho(\gamma(b)) = \sum_{i=2}^{n} I(U^i, U^i).$$

类似地取沿 $\tilde{\gamma}$ 的正常 Jacobi 场 $\tilde{U}^i$ 使得

$$\tilde{U}^i(0) = 0, \quad \tilde{U}^i(b) = \tilde{e}_i,$$

其中 $\{\tilde{e}_1 = \dot{\tilde{\gamma}}(b), \tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_n\}$ 是 $\tilde{M}_{\tilde{\gamma}(b)}$ 中幺正标架，故有

$$\Delta\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(b)) = \sum_{i=2}^{n} I(\tilde{U}^i, \tilde{U}^i).$$

所以 LCT 的证明化归为证明下列的引理 9（类似于引理 4）.

引理 9 在 LCT 的假设下，又设 $\{U^i\}_{2\leqslant i\leqslant n}$，$\{\widetilde{U}^i\}_{2\leqslant i\leqslant n}$ 分别是沿 γ，$\tilde{\gamma}$ 的正常 Jacobi 场，使得 $U^i(0)=\widetilde{U}^i(0)=0$；$\{U^i(b)\}$ 与 $\{\widetilde{U}^i(b)\}$ 分别是 $M_{\gamma(b)}$，$M_{\tilde{\gamma}(b)}$ 中幺正向量组．则

$$\sum_{i=2}^{n} I(U^i, U^i)\leqslant\sum_{i=2}^{n} I(\widetilde{U}^i, \widetilde{U}^i).$$

证明 正像证明引理 4 一样，将 $\{U^1(b)=\dot{\gamma}(b), U^2(b), \cdots, U^n(b)\}$，$\{\widetilde{U}^1(b)=\dot{\tilde{\gamma}}(b), \widetilde{U}^2(b), \cdots, \widetilde{U}^n(b)\}$ 分别沿 γ，$\tilde{\gamma}$ 平行移动得到标架场 $\{e_1(t), \cdots, e_n(t)\}$，$\{\tilde{e}_1(t), \cdots, \tilde{e}_n(t)\}$．如果

$$\widetilde{U}^i(t)=\sum_{j=2}^{n}\tilde{h}_{ij}(t)\tilde{e}_j(t),$$

那么令

$$U_1^i(t)=\sum_{j=2}^{n}\tilde{h}_{ij}(t)e_j(t).$$

由 Jacobi 场的极小性（§7 引理 6）得

$$I(U^i, U^i)\leqslant I(U_1^i, U_1^i),\quad \forall i=2, \cdots, n.$$

从而

$$\sum_{i=2}^{n} I(U^i, U^i)\leqslant\sum_{i=2}^{n} I(U_1^i, U_1^i).$$

下面就要证明．

$$\sum_{i=2}^{n} I(U_1^i, U_1^i)\leqslant\sum_{i=2}^{n} I(\widetilde{U}^i, \widetilde{U}^i).$$

继续仿照引理 4 的证明，有

$$\sum_{i=2}^{n} I(U_1^i, U_1^i)=\sum_{i=2}^{n}\int_0^b |\dot{U}_1^i|^2-\langle R_{\dot{\gamma}U_1^i}\dot{\gamma}, U_1^i\rangle,$$

$$\sum_{i=2}^{n} I(\widetilde{U}^i, \widetilde{U}^i)=\sum_{i=2}^{n}\int_0^b |\dot{\widetilde{U}}^i|^2-\langle \widetilde{R}_{\dot{\tilde{\gamma}}\widetilde{U}^i}\dot{\tilde{\gamma}}, \widetilde{U}^i\rangle.$$

于是要求我们证明：对任意 $t\in[0, b]$，在 $\gamma(t)$，$\tilde{\gamma}(t)$ 处有

$$\sum_{i=2}^{n}\langle R_{\dot{\gamma}U_1^i}\dot{\gamma}, U_1^i\rangle \geqslant \sum_{i=2}^{n}\langle \tilde{R}_{\dot{\tilde{\gamma}}\tilde{U}^i}\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{U}^i\rangle. \tag{8.8}$$

在 $\tilde{\gamma}(b)$ 处上述不等式右端恰是 $\widetilde{\mathrm{Ric}}(\dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}})(b)$，这是因为

$$\{\dot{\tilde{\gamma}}(b), \tilde{U}^2(b), \cdots, \tilde{U}^n(b)\}$$

是幺正标架. 根据 $\{U_1^i\}$ 的造法，可知

$$\{\dot{\gamma}(b), U_1^2(b), \cdots, U_1^n(b)\}$$

也是幺正标架，从而不等式右端也就是 $\mathrm{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(b)$. 可是在 $t<b$ 时 $\{\dot{\tilde{\gamma}}(t), \tilde{U}^2(t), \cdots, \tilde{U}^n(t)\}$ 可能不再是正交了，(8.8)的右端也不再是 $\mathrm{Ric}(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))$ 或它的某一倍数了. 想要证明 (8.8) 光有 LCT 的条件(2)是不行的. 简单的办法是在 LCT 中增加条件(3)，此时由于 $\tilde{M}$ 的 Jacobi 场简单，

$$\tilde{h}_{ij}(t) = f(t)\delta_{ij},$$

其中 $f(t)$ 满足

$$\begin{cases} f'' + kf = 0, \\ f(0) = 0, \ f(b) = 1. \end{cases}$$

所以

$$\sum_{i=2}^{n}\langle \tilde{R}_{\dot{\tilde{\gamma}}\tilde{U}^i}\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{U}^i\rangle(t) = f^2(t)\widetilde{\mathrm{Ric}}(\dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}})(t),$$

$$\sum_{i=2}^{n}\langle R_{\dot{\gamma}U_1^i}\dot{\gamma}, U_1^i\rangle(t) = f^2(t)\mathrm{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t).$$

于是(8.8)便成立了，从而证得引理 9 和 LCT 的结论(1).

现在我们来证明 LCT 的结论(2). 假若

$$\tilde{\Delta}\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(t)) = \Delta\rho(\gamma(t)),$$

那么上面论证中出现的不等式皆变成等式，特别地对 $i \geqslant 2$ 有

$$I(U^i, U^i) = I(U_1^i, U_1^i).$$

由 §7 引理 6 得 $U^i = U_1^i$, $\forall i \geqslant 2$. 由前面做法可知

$$U_1^i(t) = f(t)e_i(t).$$

我们知道沿 γ 的初值为零的正常 Jacobi 场 $J(t)$ 必可表为 $U^2(t)$, $\cdots$, $U^n(t)$ 的线性组合，所以

$$J(t)=\sum_{i=2}^{n} c_i U^i(t)=\sum_{i=2}^{n} c_i f(t) e_i(t), \quad c_i \in \boldsymbol{R}.$$

这便推出 LCT 结论(2)的必要部分. 至于充分性部分则是显然的. 至此我们便完成了 LCT 的证明.

现在给出 LCT 的一个推论.

推论 10 假设同 LCT, 如果 $f:[0, b]\to \boldsymbol{R}$ 是一个 C^∞ 增函数(即 $f'\geqslant 0$),则对任意 $t\in[0, b]$,

$$\tilde{\Delta} f(\tilde{\rho})(\tilde{\gamma}(t))\geqslant \Delta f(\rho)(\gamma(t)).$$

证明 由于 $\Delta f(\rho)=f''(\rho)+f'(\rho)\Delta\rho$, 故结论显见.

注记 7. 在论证 LCT 的结论过程中处理 (8.8) 几乎陷于绝境时，增加条件(3)无疑是回春的妙笔. 看来不假定 $\tilde{M}$ 是空间形式的 LCT 似乎不大行. 此外换个角度看，如果用假定 M 是空间形式代替条件(3),其余的假设不变,则此时结论不成立(建议大家自己造一个反例). 我们将在 §11 中给出 LCT 的一个应用,那时 LCT 的结论(2)起着决定性作用.

作为本节的结束,我们简单讨论**球面定理**(在第 142 页已提过的)以表明 Rauch 比较定理是如何出现在它的证明之中.

拓扑球面定理 如果 M 是一个紧致单连通黎曼流形，它的截面曲率 K 满足

$$0<\frac{1}{4}<K\leqslant 1, \tag{8.9}$$

那么 M 同胚于球面.

条件(8.9)是下列条件的单位化

$$0<\frac{k}{4}<K\leqslant k,$$

其中 k 是某正常数. 对黎曼度量乘一个常数以之来改变截面曲率

(见公式 (4.1)),由此可知:上述关于K的两种条件的球面定理彼此等价。球面定理在1951年首先为 Rauch 所证明。当时他做了一个强的假设,即将(8.9)中的1/4换成接近3/4的数。后来 Berger 与 Klingenberg 成功地将K的下界推进到1/4。对于偶维流形,(8.9)是最佳的条件了,因为复投影空间的标准度量的曲率满足$1/4 \leqslant K \leqslant 1$,而它不同胚于球面。与(8.9)有关的一些进一步评论将在下面谈到。

拓扑学中有一条 Brown **定理**(参阅 [B6]),它断言:如果一个紧致流形M是两个开集之和,其中每一开集皆同胚于$\boldsymbol{R}^n$,那么M同胚于S^n。当然这个定理是对的,不过要是你不相信也没关系,可是它那说明事物的方式对我们大有启发。照那里的说法,现在要证球面定理时首先做的事是寻找两个点$p, q \in M$,使得$\exp_p: M_p \to M$与$\exp_q: M_q \to M$分别限制在开球$B_p(\delta_1)$, $B_q(\delta_2)$上是微分同胚,并且$M = (\exp_p B_p(\delta_1)) \cup (\exp_q B_q(\delta_2))$。由于$\exp_x: M_x \to M$限制在$M_x$中足够小的$B_x(\delta)$上总是微分同胚,因此我们现在面临这样的问题:$\delta$能够有多大?定义$M$的**单一半径** $i(M)$如下:

$$i(M) \equiv \inf_{x \in M} \{\delta(x): \delta(x) \text{ 是 } M_x \text{ 中使 } \exp_x \text{ 在其上为微分同胚的最大开球的半径}\}.$$

对于紧致流形说来,由§3引理1知$i(M) > 0$。从而对任意$x \in M$, $\exp_x$在$B_x(i(M))$上是微分同胚。以后记$B_x(i(M))$为$B(x)$。我们希望合适地选$p, q \in M$,使得

$$M = (\exp_p B(p)) \cup (\exp_q B(q)).$$

为达目的粗略看来p与q应该相距越远越好,自然也希望$i(M)$越大越好。通常称$d(M) \equiv \max_{x,y \in M} \{d(x, y)\}$为$M$的**直径**,故选$p, q \in M$使得$d(p, q) = d(M)$。关于$i(M)$多大合适呢?显然至少

$$i(M) > \frac{1}{2} d(M).$$

我们知道当截面曲率>1/4时，由M的紧致性及Bonnet-Myers定理可知：$d(M) < 2\pi$。因此现在需要$i(M) \geqslant \pi$。这件事可以从下面 Klingenberg 对 $i(M)$ 的下界估计得到(参阅 [CE])。

Klingenberg **定理**　如果M是紧致单连通黎曼流形，$1/4 < K \leqslant 1$，则

$$i(M) \geqslant \pi.$$

至此我们已经知道

$$d(p,\ q) = d(M),\quad i(M) \geqslant \pi > \frac{1}{2} d(M)$$

了。现在我们大有希望证出 $M = B_p \cup B_q$，其中

$$B_p = \exp_p(B(p)),\ B_q = \exp_q(B(q)),$$

$B(p)$ 与 $B(q)$ 的半径皆是 $i(M)$。这真是对的，原因简述如下：

令 $i(M) = \beta \geqslant \pi$，我们其实要证明：如果 $x \in M$，$d(x, p) > \beta$，则 $d(x, q) < \beta$。

参看图 8.4，我们令 γ_1 是 p 到 x 的最短测地线，于是 $L(\gamma_1) \geqslant \beta$。由于 p, q 相距最远，从而不难证明有一条连接 p 至 q 的最短测地线 γ_2 使得 $\dot{\gamma}_1$ 与 $\dot{\gamma}_2$ 的夹角 $\theta \leqslant \pi/2$。随便取一条连接 x 至 q 的最短测地线 ζ，我们希望证明 $L(\zeta) < \beta$。由于 $K > 1/4$ 及M的紧致性，故存在 $\varepsilon > 0$，使得

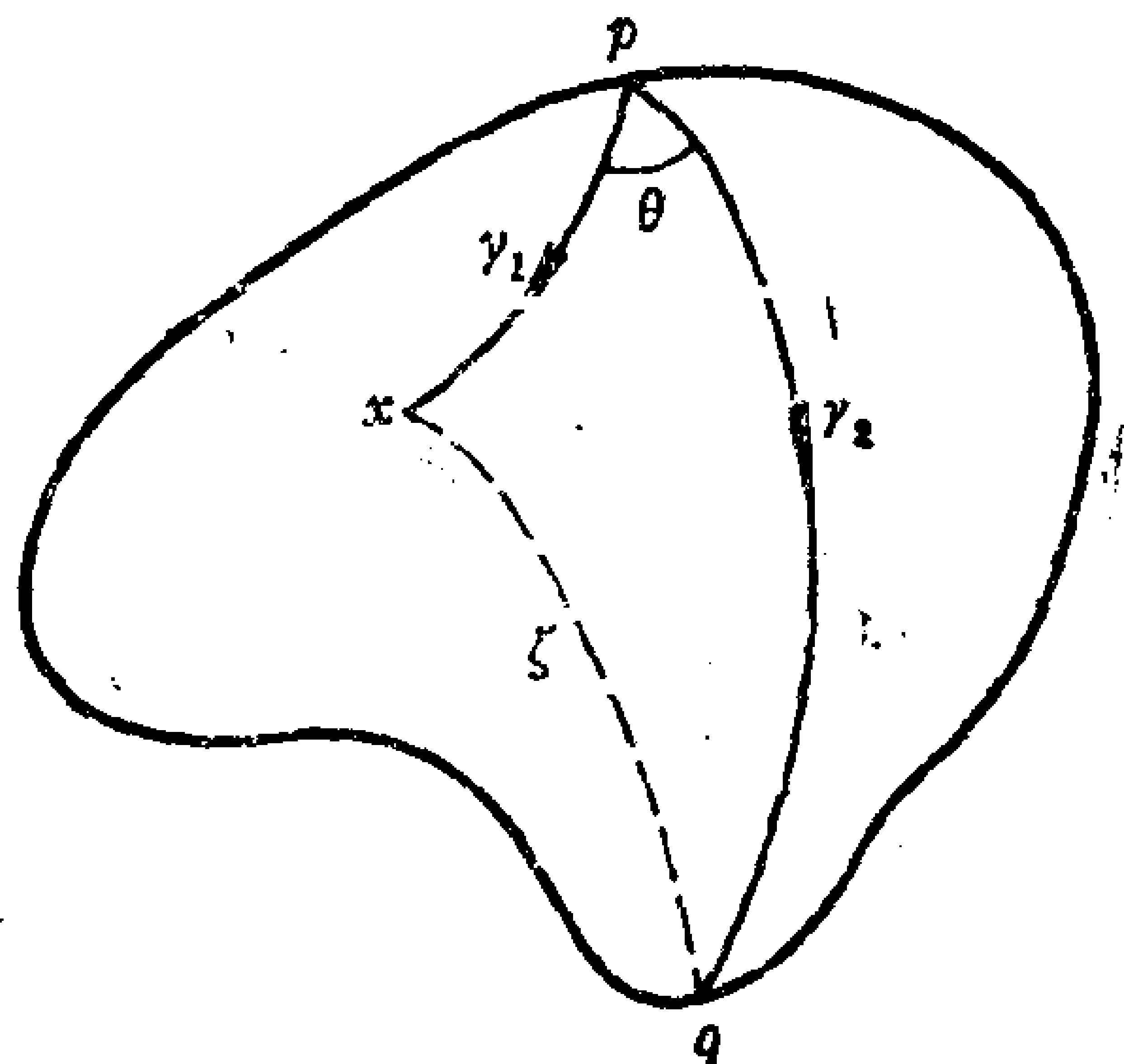


图 8.4

$$K \geqslant \frac{1}{(2-\varepsilon)^2}.$$

我们知道 $\boldsymbol{R}^3$ 中半径为 $(2-\varepsilon)$ 的球面 $S^2(2-\varepsilon)$，它的截面曲率是$1/(2-\varepsilon)^2$. 我们比较M与 $S^2(2-\varepsilon)$. 在 $S^2(2-\varepsilon)$ 中画测地三角形 ABC（见图8.5），使得A是北极，AB 与 AC 的边长分别是 $L(\gamma_1)$ 与 $L(\gamma_2)\equiv d(M)$，夹角为 $\angle A=\theta$. 由于

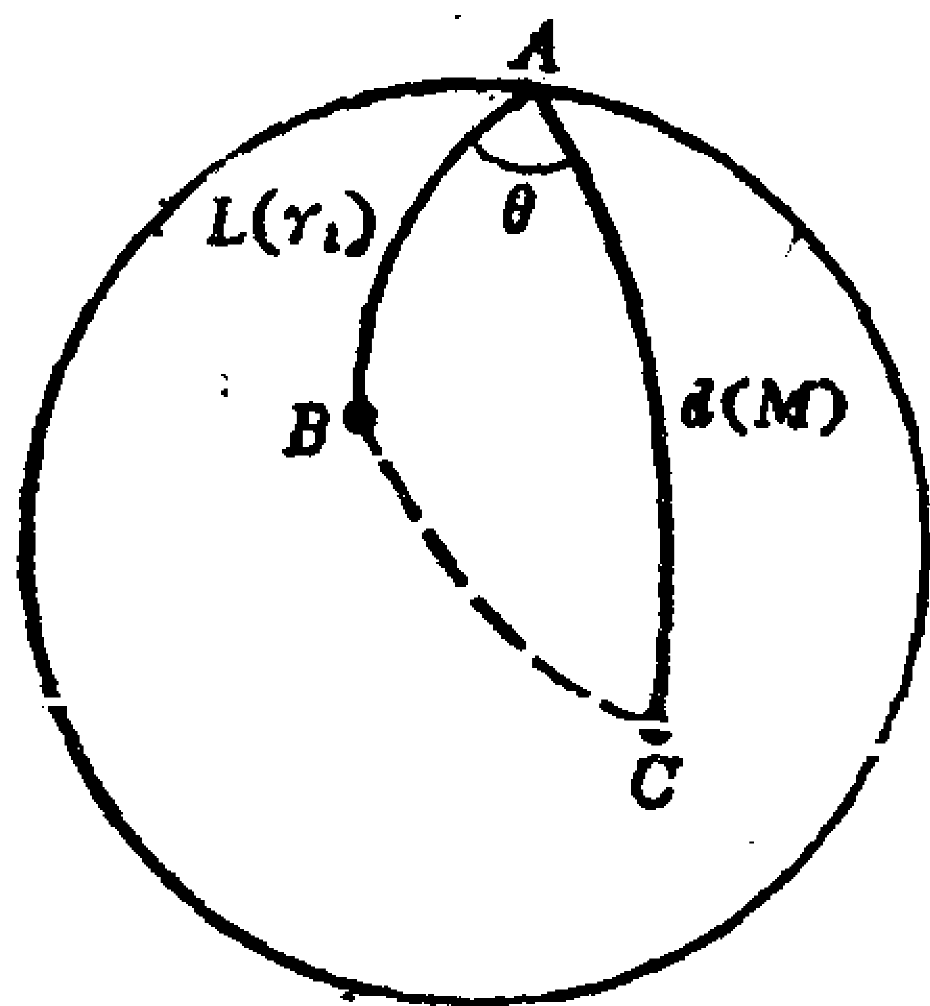


图 8.5

$$AB=L(\gamma_1)\geqslant\beta\geqslant\pi,$$
$$AC=d(M)\geqslant i(M)\geqslant\pi,$$

所以 B，C都在南半球. 又由于$\theta\leqslant\pi/2$，想一想或者用球面三角公式可知

$$BC\leqslant\frac{1}{4}(\text{大圆})=\frac{1}{4}2\pi(2-\varepsilon)<\pi\leqslant\beta.$$

因为M的曲率$\geqslant S^2(2-\varepsilon)$的曲率，故$M$中从$p$出发的测地线向前挤在一起的速度较 $S^2(2-\varepsilon)$中的快，因此直觉想来 $L(\zeta)\leqslant BC$，从而

$$d(x,q)=L(\zeta)\leqslant BC<\beta.$$

这便证明了 $M=B_p\cup B_q$. 上面想当然的不等式 $L(\zeta)\leqslant BC$ 其实可以严格证明. 它是三角形的比较定理，很像前面说的推论 2，人们称它为 Toponogov **比较定理**. 其证明本质上依赖于 Rauch 比较定理，证法大体上像推论 2 的一样，不过一般要出现共轭点，这就使证明复杂起来了. 也应该提请注意的是，现时对 $M=B_p\cup B_q$ 有一种新的证明，直接用 Rauch 比较定理而无须借助 Toponogov 比较定理（参阅[T2]）. 不管怎样，我们都是想使读者知道，Rauch 比较定理是如何在证明球面定理时起作用的.

应该指出，一旦证明 $M=B_p\cup B_q$，就可直接明确地造出M与球面的同胚，完全用不着前面提到的那个拓扑定理（[B6]）. 不过饮水思源起来，那个拓扑定理澄清了思路.

现在我们再介绍球面定理的两类推广．其一是将假设（8.9）换为 $1/4 \leqslant K \leqslant 1$，结论如何呢？

由 Bonnet-Myers 定理和 Klingenberg 定理立即可得 $\pi \leqslant i(M) \leqslant d(M) \leqslant 2\pi$．接着我们分三点介绍：

（1）当 $d(M)=2\pi$ 时，可证出 M 等距同构于 $S^n(2)$（证明这个结论其实只须假设 $K \geqslant 1/4$ 和 $d(M)=2\pi$ 就够了）．这个结果就是 Toponogov **最大直径定理**．在 §7 中我们已经提过有一个更强的结果，它就是 §11 定理 8．

（2）当 $d(M)=\pi$ 并且 M 单连通时，Berger 做出了一个使人惊奇的结果．他断言：M 或者等距同构于 $S^n(1)$，或者等距同构于复射影空间，四元数射影空间和 Cayley 数射影空间之一．在后三种情形下曲率可取到 1/4 和 1．显然，这个定理被称为 Berger **最小直径定理**．

（3）当 M 单连通，$\pi < d(M)$ 时，Berger 证明此时 M 也同胚于 S^n．这个结果与拓扑球面定理各有所长．最近 Grove 与 Shiohama（参阅［GS1］）改进 Berger 的这个结果，他们证明：

"当 M 是紧致黎曼流形，$\dfrac{\delta}{4} \leqslant K$，$\dfrac{\pi}{\sqrt{\delta}} < d(M)$ 时，M 也同胚于 S^n（注意，这里不假定 M 是单连通的）．"

由于从条件 $1/4 < K_M \leqslant 1$ 可推出存在 $\delta > 1$，$\delta/4 \leqslant K_M \leqslant 1$，又由此推出

$$d(M) \geqslant i(M) \geqslant \pi > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \quad 及 \quad \frac{\delta}{4} \leqslant K_M,$$

所以 Grove-Shiohama 定理又是拓扑球面定理的推广．

如果人们愿意假定 M 的单连通性，又能利用拓扑与几何中的一些艰深定理，那么 Grove 与 Shiohama 的结果可以用 Morse 理论推出来．进一步讨论，请参见 §9 末尾．

球面定理的另外一类推广着眼于结论上加强．是否可推出流

形M微分同胚于球面(而不只是拓扑同胚)呢?如果 $n\leqslant 6$,已经知道同胚于 S^n 的微分流形必与 S^n 微分同胚. 对 $n\geqslant 7$ 时,有些流形与 S^n 同胚但不微分同胚(参阅 [KM]). 是否假定 $1/4<K\leqslant 1$ 就能保证微分同胚于 S^n, 这依然是一个未解决的问题. 目前所知道的是: 对任意 n,存在 $\delta_n(\delta_n\downarrow 0.68\cdots$,当 $n\to\infty$ 时) 使得如果 $\delta_n\leqslant K\leqslant 1$,那么紧致单连通 n 维流形必微分同胚于 S^n. 这是许多人共同奋斗的结果,他们是 Calabi-Gromoll (1966 年左右), Sugimoto-Shiohama (1970 年左右). 取 δ_n 较大时的类似定理的证明可参阅 [CE] 第七章. 关于前面提到的 δ_n 值, 可看 [IR].

关于比较定理的最新动态也可参见 [HK].

习题 3. 设M是 2 维单连通完备黎曼流形, $K\leqslant -c^2<0$, 其中K是高斯曲率. 设$O\in M$, 令ρ是到O的距离函数,试证 $\left(\tanh\frac{c\rho}{2}\right)^2$ 是 C^∞ 的,并且$\Delta\left(\tanh\frac{c\rho}{2}\right)^2>0$.

关于这个习题,我们来讲几句. 注意 $\tanh\frac{c\rho}{2}$ 是有界的. 一个 C^∞ 函数 f 称为是**次调和的**, 如果 $\Delta f\geqslant 0$. 于是题中这样的M上就有一个非平凡的有界次调和函数. 之所以感兴趣这样的结果,根源于下列事实:

(1) 当将 $\boldsymbol{R}^2$ 看成 $\boldsymbol{C}$ 并将 dx^2+dy^2 形式上记为 $dzd\bar{z}$ 之后,我们把 $\boldsymbol{C}$ 上一个形如 $hdzd\bar{z}$ 的黎曼度量称为 Hermite **度量** 其中 $h>0$. 试证 $\boldsymbol{C}$ 上一个 C^∞ 函数关于 Hermite 度量是次调和的当且仅当关于 $\boldsymbol{C}$ 中平坦度量它是次调和的. 于是 $\boldsymbol{C}$ 上次调和性是一个独立于 Hermite 度量的性质.

(2) 熟知 $\boldsymbol{C}$ 上不存在非平凡负的次调和函数(参阅 [AS]).

由此可见 $\boldsymbol{C}$ 不具有这样的 Hermite 度量,它是完备的,曲率 $K\leqslant -c^2$. 进一步讨论,参见下面的 §9.

附　录

我们已经证明了 Rauch, Hessian 和 Laplace 算子的比较定理。这些定理实质上是对沿着测地线的两个 Jacobi 场作比较(见引理 4 和引理 9)。证明的关键是将曲率小的流形上的 Jacobi 场“搬到”曲率大的流形上,得到一个新的向量场,再以之作为标准分别与原先两个 Jacobi 场按指标形式作比较。我们已详尽地叙述了这种做法,这不但符合这些比较定理的发现过程,而且从几何上看也是很直观的。可是设想一下, Jacobi 场原本是 Jacobi 场方程的解,因此它的性质应能从方程直接推导出来。作为 Rauch 比较定理的特例的 Sturm 比较定理,当初不正是从研究方程得出的吗?这个附录打算把这些几何的比较定理写成常微分方程组的比较定理,并给予独立的证明。当然这证明不过是将几何比较定理的证明小心地翻译过来罢了。为节省篇幅,我们省略这种翻译过程。不过作为补偿,我们最后将微分方程的比较定理翻译成几何的比较定理。

设 $gl(n-1, \boldsymbol{R})$ 是 $n-1$ 阶实方阵集合, $K:[0, b)\to gl(n-1, \boldsymbol{R})$ 是一个映射满足 $K^*=K$,其中 K^* 表示 K 的转置。又设

$$A:[0, b)\to gl(n-1, \boldsymbol{R})$$

是下列常微分方程组的解

$$\begin{cases} \dfrac{d^2A}{dt^2}+AK=0, \\ A(0)=0, \quad \dfrac{dA}{dt}(0)=I\ (\text{单位方阵}), \end{cases}$$

其中 t 是 $[0, b)$ 的自然参数。

引理 11 (1) $(AA_t^*)^*=AA_t^*$, 其中 $A_t=\dfrac{dA}{dt}$;

(2) 如果在 $(0, b)$ 上 A^{-1} 存在，则 $(A^{-1}A_t)^* = A^{-1}A_t$。

证明 因为

$$
\begin{aligned}
(AA_t^* - (AA_t^*)^*)_t &= A_tA_t^* + AA_{tt}^* - A_{tt}A^* - A_tA_t^* \\
&= -A(AK)^* + (AK)A^* \\
&= A(K - K^*)A^* = 0,
\end{aligned}
$$

$$(AA_t^* - (AA_t^*)^*)(0) = 0,$$

所以

$$AA_t^* - (AA_t^*)^* \equiv 0, \quad AA_t^* = (AA_t^*)^*.$$

若 A^{-1} 存在，则可将上式变形为

$$A_t^*(A^*)^{-1} = A^{-1}A_t,$$

这就是 $(A^{-1}A_t)^* = A^{-1}A_t$。证毕。

设 C, D 是两个对称方阵，如果对于任意 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})$ 与 $(\beta_1, \cdots, \beta_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$，它们满足 $\sum\alpha_i^2 = \sum\beta_i^2$，总有

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})C\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix} \geqslant (\beta_1, \cdots, \beta_{n-1})D\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix},$$

那么我们记为 $C \succ D$。

设 $\widetilde{A}:[0, b) \to \mathrm{gl}(n-1, \mathbf{R})$满足

$$\begin{cases}\widetilde{A}_{tt} + \widetilde{A}\widetilde{K} = 0,\\ \widetilde{A}(0) = 0, \ \widetilde{A}_t(0) = I,\end{cases}$$

其中 $\widetilde{K}:[0, b) \to \mathrm{gl}(n-1, \mathbf{R})$ 具有性质：$\widetilde{K}^* = \widetilde{K}$。

引理 12 设在 $(0, b)$ 上 A^{-1}，$\widetilde{A}^{-1}$ 皆存在，并且 $K \succ \widetilde{K}$，则

$$A^{-1}A_t \prec \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t.$$

证明 因为

$$
\begin{aligned}
&[\widetilde{A}(A^{-1}A_t - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t)\widetilde{A}^*]_t \\
&= \widetilde{A}[\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t(A^{-1}A_t - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t) \\
&\quad + (-A^{-1}A_tA^{-1}A_t + A^{-1}A_{tt} \\
&\quad + \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t\widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_{tt})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}_t^*(\tilde{A}^*)^{-1}]\tilde{A}^*\\
&=\tilde{A}[\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_tA^{-1}A_t-A^{-1}A_tA^{-1}A_t-K+\tilde{K}\\
&+A^{-1}A_t\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t]\tilde{A}^*\\
&=-\tilde{A}[(K-\tilde{K})+(A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)^2]\tilde{A}^*,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{A}(A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^*]_t\\
&\quad=-\tilde{A}[(K-\tilde{K})+(A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)^2]\tilde{A}^*. \quad (8.10)
\end{aligned}
$$

所以由 (8.10) 右端负定可知

$$
\tilde{A}(A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^*\prec\lim_{t\to 0}[\tilde{A}(A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^*]=0
$$

(验证：当 $t\to 0$ 时，$A^{-1}\sim\frac{1}{t}I$, $\tilde{A}^{-1}\sim\frac{1}{t}I$, $A_t\sim I$, $\tilde{A}_t\sim I$, $\tilde{A}\sim tI$)。从而 $A^{-1}A_t-\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t\prec 0$. 这时我们还不能立即得到 $A^{-1}A_t\prec\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t$ (为什么?请大家想一想)，因此对证明还须做一点修改。对于任意正交方阵 $U\in O(n)$,从 $K\succ\tilde{K}$ 可得 $K\succ U\tilde{K}U^{-1}$, 又易见 $U\tilde{A}U^{-1}$ 满足

$$
\begin{cases}X_{tt}+XU\tilde{K}U^{-1}=0,\\ X(0)=0,\ X_t(0)=I.\end{cases}
$$

故由上面论证可知

$$
A^{-1}A_t-U\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_tU^{-1}\prec 0,
$$

这就表明 $A^{-1}A_t\prec\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t$. 证毕。

引理 13 设在 $(0,b)$ 上 A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$ 皆存在，并且 $K\succ\tilde{K}$, 则在 $[0,b)$ 上有

(1) $AA_t^*\prec\tilde{A}\tilde{A}_t^*$,

(2) $AA^*\prec\tilde{A}\tilde{A}^*$.

证明 任取 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$ 与 $(\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})\in\boldsymbol{R}^{n-1}$ 使得

$$
\sum\alpha_i^2=\sum\beta_i^2\neq 0.
$$

令

$$f=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1})AA^*\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$g=(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n-1})\tilde{A}\tilde{A}^*\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}.$$

利用引理 11 可知

$$f_t=2(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1})AA_t^*\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$g_t=2(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n-1})\tilde{A}\tilde{A}_t^*\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}.$$

因此引理的结论(1)与(2)分别相当于 $f_t\leqslant g_t$，$f\leqslant g$。令

$$(\bar{\alpha}_1,\ \cdots,\ \bar{\alpha}_{n-1})=\frac{1}{\sqrt{f}}(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{n-1})A,$$

$$(\bar{\beta}_1,\ \cdots,\ \bar{\beta}_{n-1})=\frac{1}{\sqrt{g}}(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n-1})\tilde{A}.$$

显见 $\sum\bar{\alpha}_i^2=1=\sum\bar{\beta}_i^2$. 故由引理 12 得

$$(\bar{\alpha}_1,\ \cdots,\ \bar{\alpha}_{n-1})A^{-1}A_t\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_{n-1}\end{pmatrix}\leqslant(\bar{\beta}_1,\ \cdots,\ \bar{\beta}_{n-1})\tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t\begin{pmatrix}\bar{\beta}_1\\ \vdots\\ \bar{\beta}_{n-1}\end{pmatrix},$$

即

$$\frac{f_t}{f}\leqslant\frac{g_t}{g}. \tag{8.11}$$

从而 $\left(\ln\dfrac{f}{g}\right)_t\leqslant 0$. 不难验证 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f}{g}=1$，故 $\ln\dfrac{f}{g}\leqslant 0$，$f\leqslant g$。这便证出(2). 又由(8.11)得

$$f_t \leqslant \frac{f}{g} g_t \leqslant g_t,$$

则(1)也证出。

引理 14 设在 $(0, b)$ 上 A^{-1}, $\tilde{A}^{-1}$ 皆存在，$\mathrm{tr}K \geqslant \mathrm{tr}\tilde{K}$,并且 $\tilde{K} = hI$,其中 $\mathrm{tr}K$ 记矩阵K的对角线上元素之和，h 是 $[0, b]$上 C^∞ 函数，则

$$\mathrm{tr}(A^{-1}A_t) \leqslant \mathrm{tr}(\tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{A}_t).$$

证明 因为 $\tilde{K} = hI$,故由方程解出的 $\tilde{A}$ 也可表为

$$\tilde{A} = f \cdot I,$$

其中 f 是 $[0, b]$ 上的函数。对 (8.10) 两端取 tr 并将 $\tilde{A} = fI$ 代入，立即有

$$[\mathrm{tr}\tilde{A}(A^{-1}A_t - \tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^*]_t \leqslant 0.$$

注意到$\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{tr}\tilde{A}(A^{-1}A_t - \tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^* = 0$,所以

$$\mathrm{tr}\tilde{A}(A^{-1}A_t - \tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^* \leqslant 0.$$

从而

$$\mathrm{tr}(A^{-1}A_t - \tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t) = \frac{1}{f^2}\mathrm{tr}\tilde{A}(A^{-1}A_t - \tilde{A}^{-1}\tilde{A}_t)\tilde{A}^* \leqslant 0.$$

证毕。

现在我们用上述诸引理推出几何上的比较定理。设 $\gamma:[0, b) \to M$ 是正规测地线，取沿着 γ 平行的幺正标架场 $\{e_1(t), \cdots, e_n(t)\}$使得 $e_n(t) = \dot{\gamma}(t)$。设 $J_1(t), \cdots, J_{n-1}(t)$ 是沿着 γ 的正常 Jacobi 场，使得

$$J_i(0) = 0, \quad \dot{J}_i(0) = e_i(0), \quad \forall i = 1, \cdots, n-1.$$

这时 $\{J_i\}$ 可表为

$$\begin{pmatrix} J_1(t) \\ \vdots \\ J_{n-1}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

其中 $A:[0, b) \to \mathrm{gl}(n-1, \boldsymbol{R})$。于是 $\{J_i\}$ 满足的 Jacobi 场方

程变为

$$A_{tt} + AK = 0,$$

其中 $K = (K_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$, $K_{ij} = \langle R(\dot{\gamma}, e_i)\dot{\gamma}, e_j\rangle$. 容易算出:

$$(\langle J_i, J_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} = AA^*,$$

$$(\mathrm{D}^2\rho(J_i, J_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} = AA_t^*,$$

$$(\mathrm{D}^2\rho(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} = A^{-1}A_t,$$

$$\Delta\rho = \mathrm{tr}A^{-1}A_t.$$

由此可知: 引理 13 的 (2), 引理 12, 引理 14 分别就是 Rauch, Hessian, Laplace 算子的比较定理.

最后我们指出, 证明上述各比较定理的过程中(8.10)是特别重要的. 它反映了过去证明几何比较定理时的关键. (8.10)中正项$(A^{-1}A_t - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{A}_t)^2$ 相当于 Jacobi 场在指标形式下的极小性, 等式中不对称地出现 A 与 $\widetilde{A}$ 反映了"曲率小流形上的 Jacobi 场搬到曲率大的流形上去"这一手法. 顺便指出, 仔细考虑(8.10)还可将引理 12,13,14 改进, 找出结论中不等式变成等式的充要条件. 如果以 $\widetilde{A}:[0, b)\to \mathrm{gl}(m, \boldsymbol{R})$, $\widetilde{K}:[0, b)\to \mathrm{gl}(m, \boldsymbol{R})$ 代替前面讨论中的 $\widetilde{A}$, $\widetilde{K}$ (此时 m 可以不为 $n-1$), 那么也有相应的引理 11—引理 13. 此时只须将 $C \succ D$ 理解为: C 的特征值 $\geqslant D$ 的特征值就可以了. 这些都较容易, 故不再说了.

§ 9 Morse 指数定理

本节参考文献

[M1], §15 (讲法上无可匹敌).

将要讨论的 Morse 指数定理可以认为是讨论指标形式的高潮，它主要是将 §7 中的引理 2—5 推到它们的逻辑终结(因此一开始请大家复习 §7 中的那些引理). 此外，这个定理也提交了所谓无穷维 Morse 理论的基石. 我们先叙述并证明这个定理，而后再讨论它的意义及应用.

设 $\gamma:[0,\bar{b}]\to M$ 是一条测地线，如果 $\gamma(\bar{b})$ 共轭于 $\gamma(0)$，我们就把 $\mathfrak{V}_0(0,\bar{b})$ 中所有 Jacobi 场构成子空间的维数称为 $\gamma(\bar{b})$ 的**重数**. 换句话说，重数就是所有在 0, $\bar{b}$ 处为零的沿 γ 的正常 Jacobi 场构成空间的维数. 往后我们假定 $\dim M=n$，那么共轭点的重数至多为 $n-1$. 这是因为上面提到的 Jacobi 场 J 满足

$$\langle \dot{J}(t),\dot{\gamma}(t)\rangle=\langle J(t),\dot{\gamma}(t)\rangle'\equiv 0,$$

所以 $\dot{J}(\bar{b})\perp\dot{\gamma}(\bar{b})$，继而由 §5 引理 1 可知所有上面的 Jacobi 场与 $\dot{\gamma}(\bar{b})$ 的垂直补 $\dot{\gamma}(\bar{b})^{\perp}$ 中某子空间一一对应，这一一对应是由 $J\longmapsto\dot{J}(\bar{b})$ 给出的. 由此可见重数至多为 $n-1$. 下面考虑定义在 $\mathfrak{V}_0(0,b)\equiv\mathfrak{V}_0$ 上的指标形式 I. 回忆一下，$\mathfrak{V}_0$ 是所有沿着 γ 的某些向量场的集合，这些向量场是分段 C^∞ 的，处处与 $\dot{\gamma}$ 垂直，并且在 0 与 b 处为零的. I 的**零化数** $\nu(b)$ 定义为 I 的零化空间的维数，即

$$\nu(b)=\dim\{X\in\mathfrak{V}_0(0,b):\text{对任意 } Y\in\mathfrak{V}_0,\ I(X,Y)=0\}.$$

I 的**指数** $i(b)$ 定义为 $\mathfrak{B}_0$ 中使 I 为负定的极大子空间的维数. $i(b)$ 也称为是测地线 $\gamma:[0,b]\to M$ 的**指数**. 从定义看 $\nu(b)$, $i(b)$ 可能是无穷大,但是 Morse 指数定理指出它们皆是有限的. 首先我们有

引理 1 给定一条测地线 $\gamma:[0,b]\to M$,如果 $\gamma(b)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点,则 $\nu(b)=0$. 如果 $\gamma(b)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点,则 $\nu(b)$ 就是 $\gamma(b)$ 做为共轭点时的重数.

证明 直接从 §7 引理 5 推出. 证毕.

下面我们固定一条测地线 $\gamma:[0,1]\to M$,对于每一个 $t\in[0,1]$, I^t 记 $\gamma|_{[0,t]}$ 的指标形式, 它是作用在向量空间 $\mathfrak{B}_0(0,t)$ 上的. I^t 的指数, 零化数分别记为 $i(t)$, $\nu(t)$.

Morse 指数定理 $i(1)=\sum\limits_{t<1}\nu(t)<\infty$.

由于引理 1, Morse 指数定理等价于下面的说法: I 在 $\mathfrak{B}_0(0,1)$ 上的指数有限并等于在 $\gamma|_{[0,1)}$ 上 $\gamma(0)$ 的所有共轭点的重数和. 我们在此要特别强调, 这个和式中不包含 $\nu(1)$, 亦即当 $\gamma(1)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点时,它的重数不出现在和式中.

Morse 指数定理的一个部分是 $\sum\limits_{t<1}\nu(t)<\infty$. 很容易看出这个不等式有一个**推论**: 沿着 γ, $\gamma(0)$ 的共轭点的个数总是有限的. 这个推论直观想来似乎是太显然了 (你也许会想, 每一个 Jacobi 场的零点总是离散的, 对计算共轭点个数有贡献的至多有 $n-1$ 个线性无关的 Jacobi 场,……),尽管这样设想, 但是这个推论仅有的一个证明是 Morse 指数定理提供的. 为了证明 Morse 指数定理,我们先做些准备.

引理 2 如果 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条测地线,使得 $\gamma(b)$ 不是 $\gamma(a)$ 的共轭点,则对任意 $X\in M_{\gamma(a)}$, $Y\in M_{\gamma(b)}$,存在唯一的沿着 γ 的 Jacobi 场 U,使得

$$U(a)=X,\quad U(b)=Y.$$

证明 由§7引理7可知，存在一个沿 γ 的 Jacobi 场 J_1，使得

$$J_1(a)=0,\quad J_1(b)=Y.$$

类似地存在沿 γ 的 Jacobi 场 J_2 使得 $J_2(a)=X$，$J_2(b)=0$. 于是 Jacobi 场 $U=J_1+J_2$ 满足 $U(a)=X$，$U(b)=Y$，假若另外还有 Jacobi 场 $\bar{U}$ 具有性质：$\bar{U}(a)=X$，$\bar{U}(b)=Y$，那么 $U-\bar{U}$ 是一个 Jacobi 场，它在 a，b 处为零. 由于 $\gamma(a)$ 不与 $\gamma(b)$ 共轭，故 $U-\bar{U}$ 必恒为零. 证毕.

接着我们讲一个证明定理中用到的最重要的手法，那是从 $\mathfrak{V}_0\equiv\mathfrak{V}_0(0,1)$ 中抽出一个有限维子空间 T_1，使得 I 在 $\mathfrak{V}_0$ 上的指数，零化数与 I 在 T_1 上的一样. 为了定义 T_1，取一串有限序列 $t_0=0<t_1<\cdots<t_{k+1}=1$ 分割区间 $[0,1]$，使得每一个 $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 皆无共轭点(由§3引理1可知这样的分割总是有的)，于是定义

$$T_1\equiv T_1(1)=\{X\in\mathfrak{V}_0:X \text{ 沿着每段 } \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \text{ 是 Jacobi 场},\ \forall i=0,\cdots,k\}.$$

我们称 T_1 中元素为**分段 Jacobi 场**. 另外定义

$$T_2\equiv T_2(1)=\{X\in\mathfrak{V}_0:X(t_i)=0,\ \forall i=0,\cdots,k\}.$$

我们**断言**:

$$\mathfrak{V}_0=T_1\oplus T_2,\quad \dim T_1<\infty,\tag{9.1}$$

$$I(T_1,T_2)=0,\tag{9.2}$$

$$I|_{T_2}\text{ 是正定的}.\tag{9.3}$$

为证明这些事，先定义一个映射 $\varphi:T_1\to M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_k)}$，若 $J\in T_1$，令 $\varphi(J)=(J(t_1),\cdots,J(t_k))$. 由引理2可知 φ 是双方一一的，而且是线性同构，因此 $\dim T_1<\infty$. 如果 $X\in\mathfrak{V}_0$，令 $J_X=\varphi^{-1}(X(t_1),\cdots,X(t_k))$，显然 $J_X\in T_1$，$X-J_X\in T_2$，从而

$$X = J_X + (X - J_X) \in T_1 + T_2.$$

又用引理 2 可知 $T_1 \cap T_2 = \{O\}$,这样就证出(9.1)了. 至于(9.2),它可从 §7(7.7)推出. 为证(9.3),设 $X \in T_2$, 令 X_i 是 X 在$[t_i, t_{i+1}]$上的限制, 令 I_i 是沿着 $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 作用在 $\mathfrak{V}_0(t_i, t_{i+1})$ 上的指数形式,于是由 §7 引理 2 可知

$$I(X, X) = \sum_{i=0}^{k} I_i(X_i, X_i) > 0,$$

从而证出 (9.3).

我们把限制在 T_1 上的 I 的零化数, 指数分别记为 $\nu_1(1)$, $i_1(1)$. 由 (9.1), (9.2), (9.3) 立即可知 $\nu(1) = \nu_1(1)$, $i(1) = i_1(1)$.

用上面的手法立即可得 $i(1) < \infty$. 为证 Morse 指数定理,只要证明 $i(1) = \sum\limits_{s<1} \nu(s)$ 就行了. 我们再写两个引理.

引理 3 设 $\tau \in (0, 1]$,则对足够小的 $\varepsilon > 0$,有 $i(\tau - \varepsilon) = i(\tau)$. 确切说来,存在 $\delta > 0$,对所有 ε,$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \delta$,有 $i(\tau - \varepsilon) = i(\tau)$.

引理 4 设 $\tau \in [0, 1)$,则对足够小的 $\varepsilon > 0$,有

$$i(\tau + \varepsilon) = i(\tau) + \nu(\tau).$$

目前我们先用引理 3, 引理 4 来证明 Morse 指数定理.

Morse **指数定理的证明** 我们考察定义在[0, 1]上两个函数 $i(t)$ 和 $\nu(t)$. 从引理 3,引理 4 可知: 当 $\gamma(\tau)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点时,就存在 $\varepsilon > 0$ 使得 i 在 $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ 上是常数; 当 $\gamma(\tau)$是 $\gamma(0)$ 的共轭点时,就存在 $\varepsilon > 0$ 使得 i 在 $(\tau - \varepsilon, \tau]$ 和$(\tau, \tau + \varepsilon)$ 上是常数,并且 t 逐渐变大通过 τ 时 i 值跳跃 $\nu(\tau)$值. 由此可见(如图 9.1 所示),当 t 从 0 向 1 移动,每遇到一个$\gamma(0)$的共轭点时 $i(t)$ 跳跃 $\nu \geqslant 1$,而 $i(1)$ 有限,故 i 只能跳有限次. 这表明 [0, 1]中只有有限个 $\gamma(0)$ 的共轭点. 再由引理 3,引理 4 具体描述 i

的跳跃情况以及 $i(0)=0$，可见 i 是阶梯函数，如图所示。于是 Morse 指数定理便证完了。

引理 3 与引理 4 的证明 仍用前面提过的法子，将 I 限制在 T_1 上考虑，这不改变指数与零化数。对于 $\tau\in(0,1)$，我们合适地选一个分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{k+1}=1$，使得 $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 不包含共轭点($i=0,\cdots,k$)，并且有 j 使 $\tau\in(t_j,t_{j+1})$。令

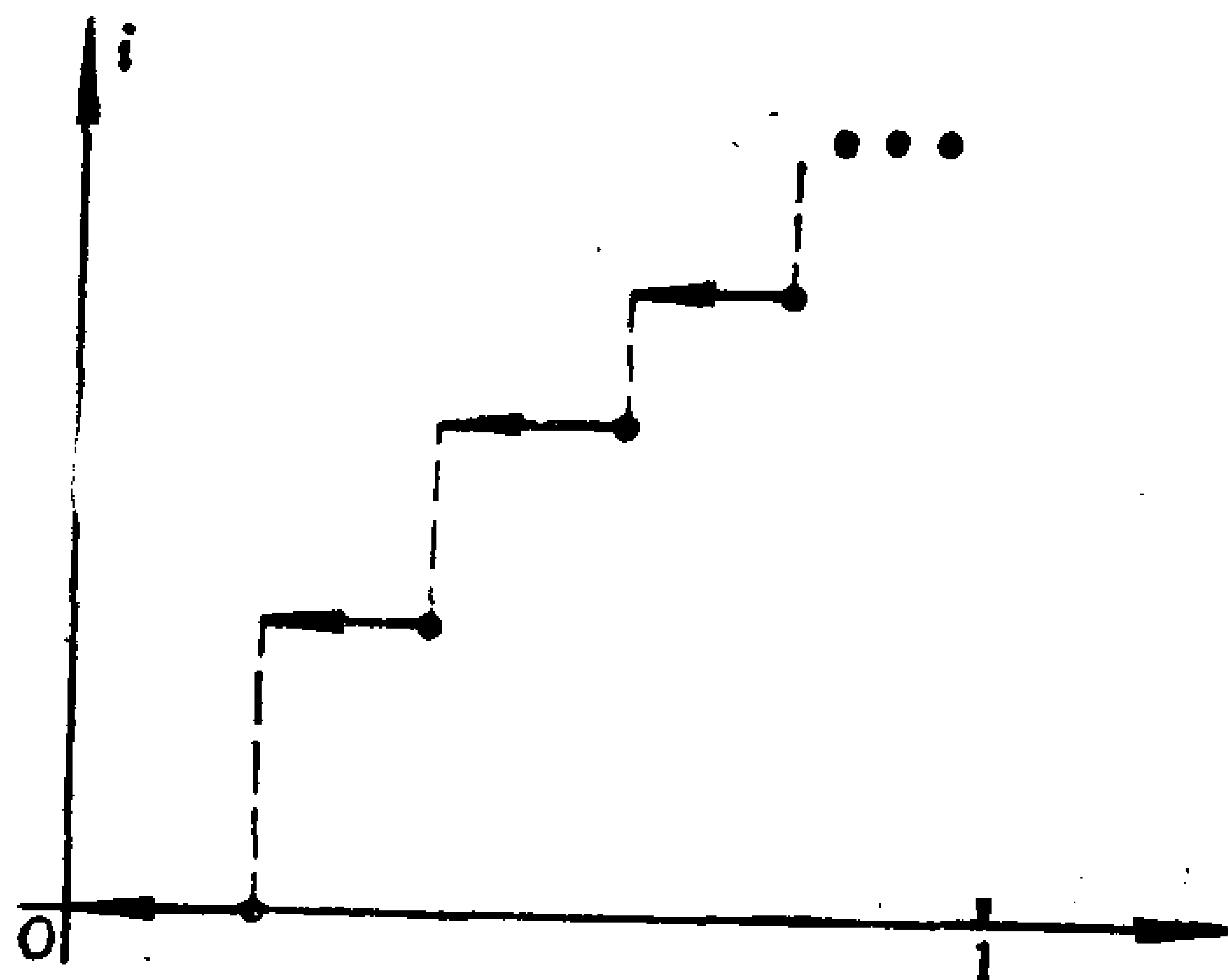


图 9.1

$$T_1(\tau)=\{X\in\mathfrak{B}_0(0,\tau): X \text{ 沿每条 } \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} \text{ 是 Jacobi 场}, \forall i=0,\cdots,j-1, \text{ 并且 } X \text{ 沿 } \gamma|_{[t_j,\tau]} \text{ 也是 Jacobi 场}\}.$$

仿照前面也有

$$\varphi^\tau:\ T_1(\tau)\to M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)}: X\longmapsto(X(t_1),\cdots,X(t_j)).$$

由于 φ^τ是线性同构，故可以将 $I|_{T_1(\tau)}$ 看成 $M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)}$ 上的二次型，记做 I^τ。过去的论证表明

$$i(\tau)=i(I^\tau),\quad \nu(\tau)=\nu(I^\tau),$$

其中 $i(I^\tau)$，$\nu(I^\tau)$ 分别是 I^τ 的指数，零化数。

首先我们断言：作为 $M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)}$ 上的二次型 I^τ，它连续依赖于 τ。这是因为对 $x,\ y\in M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)}$，记

$$X=(\varphi^\tau)^{-1}(x),\quad Y=(\varphi^\tau)^{-1}(y),$$

$$X_i=X|_{[t_i,t_{i+1}]},\quad \forall i=0,\cdots,j-1,$$

$$X_\tau=X|_{[t_j,\tau]},$$

则有

$$I^{\tau}(x,y)=I(X,Y)=\sum_{i=0}^{j-1}\langle \dot{X}_i, Y\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}-\langle \dot{X}_{\tau}(t_j), Y(t_j)\rangle$$

(见 §7 中(7.7)).

现在我们考察 $i(I^{\tau})$ 如何随 τ 变化. 将有限维向量空间 $M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)}$ 中使 I^{τ} 正定的最大子空间维数记作 $i_+(\tau)$. 由线性代数的定理可知

$$i(\tau)+\nu(\tau)+i_+(\tau)=\dim(M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)}).$$

由于 I^{τ} 连续依赖了 τ,因此对足够小的 $\varepsilon>0$,

$$i(\tau\pm\varepsilon)\geqslant i(\tau),\quad i_+(\tau\pm\varepsilon)\geqslant i_+(\tau).$$

由此即知

$$\begin{aligned}i(\tau)\leqslant i(\tau\pm\varepsilon)&=\dim(M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)})-\nu(\tau\pm\varepsilon)\\&\quad-i_+(\tau\pm\varepsilon)\leqslant\dim(M_{\gamma(t_1)}\oplus\cdots\oplus M_{\gamma(t_j)})\\&\quad-\nu(\tau\pm\varepsilon)-i_+(\tau)\\&=i(\tau)+\nu(\tau)-\nu(\tau\pm\varepsilon)\leqslant i(\tau)+\nu(\tau),\end{aligned}$$

也就是有

$$i(\tau)\leqslant i(\tau\pm\varepsilon)\leqslant i(\tau)+\nu(\tau).\qquad(9.4)$$

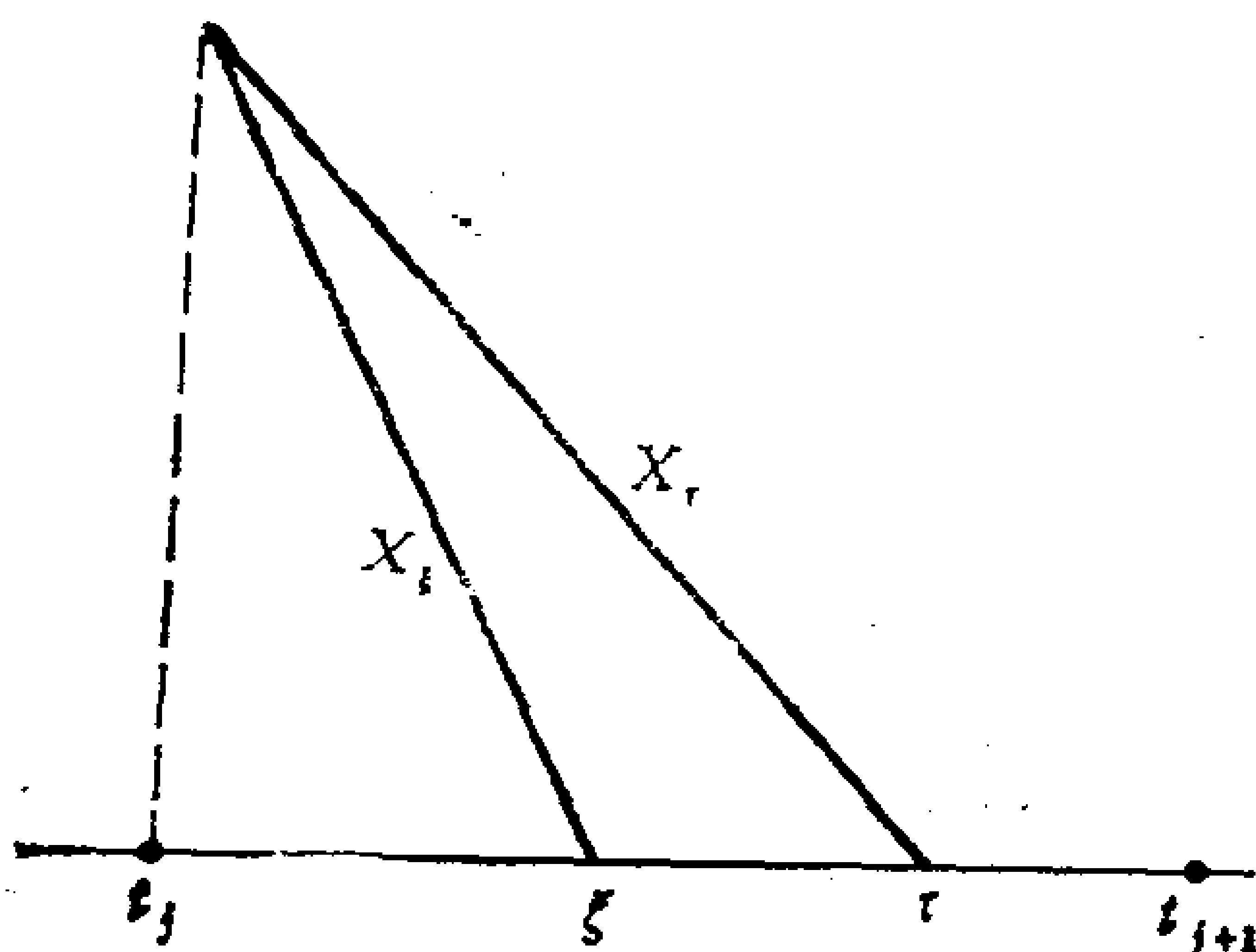


图 9.2

假设有 ξ 使得 $t_j<\xi<\tau<t_{j+1}$ (见图 9.2), 那么

$$\begin{aligned}I^{\xi}(x,x)-I^{\tau}(x,x)&=I(X_{\xi},X_{\xi})\\&\quad-I(X_{\tau},X_{\tau}).\end{aligned}$$

由 §7 引理 6 (Jacobi 场的极小性)可知

$$I(X_{\tau},X_{\tau})\leqslant I(X_{\xi},X_{\xi}),$$

并且等号成立的充要条件是 $X(t_j)=0$. 故 $I^{\tau}(x,x)\leqslant I^{\xi}(x,x)$, 并且等号成立的充要条件是 $X(t_j)=0$. 由此可见 I^{τ} 在 I^{ξ} 的最

大负定子空间上也是负定的. 对于 I^{ξ} 的零化空间中任一元素 $x \neq 0$,$(\varphi^{\xi})^{-1}(x)$ 属于 I 在 $\mathfrak{B}_0(0,\xi)$ 上的零化空间,从而是 $\gamma|_{[0,\xi]}$ 上端点处为零的正常 Jacobi 场,它在 t_j 点必不为零(否则与 $x \neq 0$ 矛盾),所以

$$I(X_{\tau}, X_{\tau}) < I(X_{\xi}, X_{\xi}), \quad I^{\tau}(x,x) < I^{\xi}(x, x) = 0.$$

这样一来在 I^{ξ} 的最大负定子空间及零化空间上 I^{τ} 是负定的, 即

$$i(I^{\tau}) \geqslant i(I^{\xi}) + \nu(I^{\xi}).$$

于是

$$i(\tau) = i(I^{\tau}) \geqslant i(I^{\xi}) + \nu(I^{\xi}) = i(\xi) + \nu(\xi). \tag{9.5}$$

由(9.4)和(9.5)可知

$$i(\tau) \overset{(9.4)}{\leqslant} i(\tau - \varepsilon) \overset{(9.5)}{\leqslant} i(\tau) - \nu(\tau - \varepsilon) \leqslant i(\tau),$$

$$i(\tau + \varepsilon) \overset{(9.4)}{\leqslant} i(\tau) + \nu(\tau) \overset{(9.5)}{\leqslant} i(\tau + \varepsilon),$$

从而

$$i(\tau - \varepsilon) = i(\tau), \quad i(\tau + \varepsilon) = i(\tau) + \nu(\tau).$$

引理 3 和引理 4 得证.

Morse 指数定理在几何与拓扑学中有许多应用. §10 将给出它在**共轭轨迹**上的一个简单应用，现在我们将简单描述它在无限维 Morse 理论中的作用. 所谓 Morse **理论**则是研究一个函数 $f: M \to \boldsymbol{R}$ 在**临界点**(f' 为零的点) 附近的状况与M的拓扑之间的相互影响. 我们的讨论既要假定一些代数拓扑知识，又多半是非正式的. 一开始我们就来定一个非正式的基调，即是说前面对 Morse 理论的描述中可以容许M是无限维流形. 有限维流形上的**道路空间**就是一个无限维流形,这个例子不久就要谈到.

首先我们回忆**有限维 Morse 理论的基本定理**① (甲) 如果 $f: M \to \boldsymbol{R}$ 只具有非退化的临界点，并且每一个 $M^a = \{x \in M:$

① 见[M1], 第 20 页.

$f(x) \leqslant a\}$ 是紧致的，则M具有一个 CW **复合形**的伦型，这个 CW 复形中每一个 λ 维**胞腔**对应着 f 的一个**指数**为 λ 的临界点.

我们复习一些与上面有关的定义.我们可使M具有黎曼度量，那么 f 的临界点 x 是**非退化**的当且仅当 D^2f 是 M_x 上非退化的对称双线性函数(简称非退化二次型). 临界点 x 的**指数**就是 M_x 上二次型 D^2f 的指数. 如果 $\dim M = n$，那么指数为 n 的临界点是局部极大的，指数为零者是局部极小的. 一个**胞腔**就是同胚于某个 $\boldsymbol{R}^k$ 中的开球者.

举一个例子说，$M = S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$.设$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中第 $n+1$ 个坐标函数是 x^{n+1}，那么 x^{n+1} 限制在 S^n 上是一个有两个非退化临界点的函数，临界点是 $(0, \cdots, 0, 1)$和$(0, \cdots, 0, -1)$，它们的指数分别是 n，0.反之(见 [M1] 第 25 页)，如果 f: $M \to \boldsymbol{R}$ 恰有两个非退化临界点，M又是紧致的，则 M 同胚于 S^n (也可参阅本书第 158 页提到的 Brown 定理). 可是只用 (甲)，我们仅能知道M有一个 CW 复形的伦型，这个 CW 复形有一个 n 维胞腔和一个零维胞腔. 直观想来，M是一个球面了.

现在我们不考虑**有限维**流形M上只具有**非退化**临界点的函数 f: $M \to \boldsymbol{R}$，而去考虑定义在 $\Omega_{p,q}$ 上的一个特殊函数(长度函数)，其中 $\Omega_{p,q}$ 是黎曼流形 $\bar{M}$ 中连接其上两固定点 p，q 的所有道路的集合.与(甲)很类似，**长度函数** L: $\Omega_{p,q} \to \boldsymbol{R}$ 的"临界点"原来也决定 $\Omega_{p,q}$ 的伦型，这是 Morse 的伟大发现. 在进一步讨论之前，人们或许要问：为什么要对 $\Omega_{p,q}$ 感兴趣? 理由是很多的. 我们选最简单的两条来讲. $\bar{M}$ 中连接 p 至 q 的测地线恰是L的临界点(见 §6 引理 1)，于是关于 $\bar{M}$ 中测地线的信息可以从长度函数 L: $\Omega_{p,q} \to \boldsymbol{R}$ 那里得到；第二条是，从**同伦群**的定义可推出

$$\pi_i(\Omega_{p,q}) \cong \pi_{i+1}(\bar{M}), \quad i = 0, 1, 2, \cdots. \tag{9.6}$$

因此如果对于 L: $\Omega_{p,q} \to \boldsymbol{R}$ 有一个完全类似于(甲)的结论，我们就能用连接 p 至 q 的测地线来了解 $\bar{M}$ 的拓扑.

开始讨论 $L: \Omega_{p,q} \to \boldsymbol{R}$ 时，先回忆 §7 开始的几页，在那里实际上是建立了一个“字典”，将有限维情形翻译成 $\Omega_{p,q}$ 情形.

有限维流形 M	$\Omega_{p,q}(\bar{M})$
(1) 一点 x	(1′) 一条连接 p 至 q 的曲线
(2) 一个 C^∞ 函数 $f: M \to \boldsymbol{R}$	(2′) 长度函数 $L: \Omega_{p,q} \to \boldsymbol{R}$
(3) x 处的一个切向量	(3′) 沿 γ 的一个向量场
(4) 自 x 出发的一条曲线	(4′) γ 的一个变分 $\{\gamma_u\}$
(5) x 是 f 的一个临界点，即对任意自 x 出发的曲线 ξ，$\frac{d}{ds} f(\xi(s))\|_{s=0} = 0$	(5′) γ 是连接 p 至 q 的一条测地线，即对任意 γ 的变分 $\{\gamma_u\}$，$\frac{d}{du} L(\gamma_u)\|_{u=0} = 0$
(6) 在一个临界点 x 处的 Hessian $D^2 f$	(6′) 一条测地线 γ 的指标形式

现在我们采用完全形式的办法将上述的相似性推进到它们的势必相似的结论.

有限维流形 M	$\Omega_{p,q}(\Omega)$
(a) x 是 f 的非退化临界点（即 $D^2 f$ 只有平凡的零化空间）	(a′) 沿测地线 $\gamma: [0, 1] \to M$，$\gamma(1)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点（即沿 γ 在 $\mathfrak{V}_0(0, 1)$ 上的指标形式只有平凡的零化空间）. 这样的 γ 称为**非退化的**
(b) 非退化的临界点 x 有指数 λ	(b′) 非退化的测地线有指数 λ
(c) f 无退化的临界点	(c′) 所有连 p 至 q 的测地线非退化

(甲)的形式类似者就是下列 Morse **理论的基本定理**(甲′) 在一个完备黎曼流形 $\bar{M}$ 上，令 p, q 是 $\bar{M}$ 中这样两个点，使得所有连接它们的测地线皆是非退化的(按 (a′) 所述的定义)，那么 $\Omega_{p,q}$ 具有一个 CW 复形的伦型，这个 CW 复形的每一个 λ 维胞腔对

应着 $\Omega_{p,q}$ 中一条指数为 λ 的测地线。

需要对(甲′)做些说明：(1)首先最重要的说明是：(甲′)实际上是一个正确的定理。它有两个现成的证明。其一是完全按照上述形式的类比，当然每一步都给予严格的论证。这包括在 $\Omega_{p,q}$ 中引进 Hilbert 流形结构(这里的 $\Omega_{p,q}$ 以后简记为 Ω_{pq}，它其实只是一个 Hilbert 流形中的一个稠密子集，这个 Hilbert 流形是所有[0,1]到 $\bar{M}$ 的某类映射组成的空间，它是属于 Sobolev 空间 H_1 的)，以及对 Ω_{pq} 证明所有类似于有限维 Morse 理论的全部结果。关于这个方法可参阅 [S2]。(甲′)的另一个证明在 [M1] 中为 Milnor 漂亮地给出的，它是将对 Ω_{pq} 的讨论约化到一个有限维子空间，这个子空间实际上是一个 C^∞ 流形。对学过本节的读者来说，这已不是新鲜的事了，因为我们证明 Morse 指数定理时其实就是这么做的，即撇开 $\mathfrak{V}_0$ 不管而全力考虑 T_1。仅就证(甲′)来讲，第二种办法实在特别简单，但是第一种办法有它值得重视的诱力，因为 Hilbert 流形方法还有别的应用(见 [N2])。(2) 关于 $\bar{M}$ 的完备性的假设并非出自类比于有限维情形中的一个什么。我们还是把它看做一个天然的条件为好，因为缺少它，我们甚至连 Ω_{pq} 中有 L 的临界点 (Ω_{pq} 中的测地线)这样起码的事都还不知道哩！这一点也正很好地说明第 67 页关于需要完备性的谈论。(3) 聪明的读者一眼便能看到，存在于(甲)和(甲′)之间的类似性其实有点变形。在(甲)中要求每一个 M^a 是紧致的，而在(甲′)中却无类似的要求。但是实际上是有的，只是故意不写出来，以避免去谈论所谓的 Palais-Smale 条件 (C)。而且这条件对 $L: \Omega_{pq}\to \boldsymbol{R}$ 天生就满足。在一个无限维的对象上，如果不马上限制到有限维子集去，谈紧致性是无意义的，上面说的条件 (C) 就是每一个 M^a 的紧致性的赝品。(4) 即令不进入证明(甲′)的细节，Morse 指数定理在所有讨论中的重要作用也是显而易见的。例如在阐述(甲′)之前，我们就需要知道每条测地线的指数是有限的。(5) 关于(甲′)

的最后一点说明是：对于 $\overline{M}$ 中两点 p，q 之间连接的测地线全是非退化的这一要求是容易满足的。Sard **定理** 的一个简单推论说：对于给定 p，几乎所有的 $q\in\overline{M}$ 都具有上述性质（参阅 [M1] §18 或本书 §10 引理 1）。

作为本节的结尾，我们仍沿用非正式说法来描述 Morse 指数定理与(甲′)的**三个应用**. 首先来谈第一个应用. 假设 p,q 是 $\overline{M}$ 中**非退化点偶**(即满足(甲′)的假设)，那么他们可否用无限多条测地线连接呢？显然不总是如此，$\overline{M}=\boldsymbol{R}^n$ 便是一例。但是 J. P. Serre（见 [S3]）**证明**：如果 $\overline{M}$ 的某一维同伦群 $\pi_k(\overline{M})\neq 0(k\in \boldsymbol{Z},k\geqslant 1)$，那么 p 与 q 可用无限多条测地线连接。他当时是用**谱序列**来证的，从 $\pi_k(\overline{M})\neq 0$ 推出：有无限多个 i，$H_i(\Omega_{pq},\boldsymbol{R})\neq 0$，而后推出 Ω_{pq} 有 CW 复形的伦型，这个 CW 复形的胞腔维数是无限集. 由(甲′)知函数 $L:\ \Omega_{pq}\to\boldsymbol{R}$ 有任意大指数的临界点，这就是说：有指数可任意大的连接 p,q 的测地线。特别地，Ω_{pq} 中有无限条测地线。第二个应用基于李群论中的一个事实：如果紧致李群赋以**双不变度量**，则测地线上共轭点的重数总是偶数(这是 Bott 定理，见 [CE] 第 77 页或 [M1] 第 117 页)。利用 Morse 指数定理可知，所有测地线的指数全是偶数，再由(甲′)得：如果 p,q 是紧致李群的非退化点偶，则 Ω_{pq} 无奇维胞腔。因此

$$H_{2i+1}(\Omega_{pq},\boldsymbol{Z})=0,$$

$H_{2i}(\Omega_{pq},\boldsymbol{Z})$ 是自由交换的 $(\forall i)$。这件事是 Bott **周期性定理**证明中的一步(见 [M1] part IV)。

要说的最后一个应用是同伦球面定理. 同伦球面是一个 n 维紧致流形，它与 S^n 有相同的伦型。从代数拓扑观点来说，M 是同伦球面当且仅当对 $i=1,\cdots,n-1$，$\pi_i(M)=0$。**同伦球面定理**是说：如果M是紧致单连通黎曼流形，它的截面曲率 $K\geqslant c>0$，并且它的直径 $d(M)>\pi/2\sqrt{c}$，那么M是一个同伦球面（见 [GKM] 第 264 页）。它的证明在于指出 Ω_{pq} 中没有指数为 1，2，

$\cdots, n-2$ 的测地线,这用到关于曲率,直径的假设中全部潜力.因此如果 p, q 是非退化点偶,那么从(甲')推出 $\pi_i(\Omega_{pq})=0, i=1, \cdots, n-2$,再由(9.6)得 $\pi_i(M)=0,\ i=2, \cdots, n-1$. 由于假设 $\pi_1(M)=0$,故最后得: M是同伦球面。

为了理解同伦球面定理,我们需要将其放到第161页谈论 Grove-Shiohama 结果的上下文中来看. 推广的 Poincaré 猜测已为 Smale 解决(见 [S6] 或 [M2]),它说: 对 $n \geqslant 5$, n 维同伦球面必同胚于 S^n. Freedman 的一个新近定理(见 [F2])蕴含 Poincare 猜测在 $n=4$ 时也是对的. 现在只留下 $n=3$ 时的Poincaré猜测还未解决. 但是在所论流形上增加正曲率的假设,则它必微分同胚于 S^n. 这是因为有一个最新又最使人激动的 Hamilton 定理的缘故(见 [H1]),从 Hamilton 定理可推出: 紧致单连通具有正 Ricci 曲率的三维黎曼流形必微分同胚于 S^3. 借助上述这些深刻的定理,同伦球面定理可表述为: 一个紧致单连通 n 维黎曼流形,当它的曲率

$$K \geqslant c > 0, \quad d(M) > \pi/2\sqrt{c}$$

时,它必同胚于 S^n. 这样看来 Grove-Shiohama 定理的成就表现在放弃"单连通"假设并且不引用上述艰深的结果.

最后指出 Morse 指数定理现已推广到所谓焦点情形,基本上它是指一个计算 I 的指数的公式,这个 I 是定义在 $\mathfrak{V}$ 的子空间上的二次型,这子空间是由所有仅在测地线某一个端点为零的向量场组成的(见 [A2]).

习题. 设 $M, \tilde{M}$ 是 n 维黎曼流形, $\gamma: [0,b] \to M$, $\tilde{\gamma}: [0,b] \to \tilde{M}$ 是正规测地线,令 $K(t)$, $\tilde{K}(t)$ 是 Rauch 比较定理中所出现的,又设 $\tilde{K}(t) \leqslant K(t)$,试证: γ 的指数$\geqslant \tilde{\gamma}$ 的指数.

§ 10　共轭点和割迹

本节参考文献

[GKM]，　§§4.3，5.4。

[CE]，　第五章.

[S8，IV]，第 364 页至第 376 页.

[KN，II]，第 96 页至第 102 页.

本节的主要目的是叙述某些概念，以便于我们对测地线的极小性质进行一般性的讨论.

设M是完备的.

对 $x\in M$，设 S_x 是 M_x 中的单位球面. 对每点 $X\in S_x$，令 $r(X)$ 为**射线** $\{tX:\ t\in[0,\infty)\}$.记 $K^*(x)$ 为 $\exp_x$ 在 M_x 中的共轭点全体，即

$$K^*(x)=\{p\in M_x:\ d\exp_x \text{在} p \text{处是奇异的}\},$$

称 $K^*(x)$ 为 x 在 M_x 中的**共轭轨迹**. $K^*(x)$ 是一个闭集，所以 $r(X)\cap K^*(x)$在 $r(X)$中为闭，于是当 $r(X)\cap K^*(x)\neq\emptyset$时，存在一个最小的 $t_0>0$，使得 $t_0X\in K^*(x)$. 我们用 $\tilde{k}(X)$表示这个 t_0X，称它为点 x 沿射线 $r(X)$ 的**第一共轭点**. 集合

$$K(x)=\{\tilde{k}(X):\ X\in S_x,\ r(X)\cap K^*(x)\neq\emptyset\}$$

称为 x 在 M_x 中的**第一共轭轨迹**. 由 Morse 指数定理，每一个 $r(X)\cap K^*(x)$ 是 $r(X)$ 的一个离散子集，于是由 Fubini 定理，我们有

引理 1　**共轭轨迹** $K^*(x)$ 是 M_x 中的一个零测度集合. 特别，x 在 M_x 中的第一共轭点轨迹是一个零测度集.

设 $\mathscr{K}(x)=\exp_x K(x)$，称 $\mathscr{K}(x)$ 为 x **在 M 中的第一共轭轨迹**. 对于每一条从 x 出发的正规测地线 $\gamma:[0,b]\to M$，点 $\exp_x\tilde{k}(\dot{\gamma}(0))$ 称为 (x **的**)**沿** γ **的第一共轭点**. 这里应当小心，虽然沿 γ 的第一共轭点位于 $\gamma([0,b])\cap\mathscr{K}(x)$ 之中，但不一定等于 $\gamma([0,b])\cap\mathscr{K}(x)$，因为后者可能不止一点.

现定义 $k: S_x\to[0,\infty]$ 为

$$k(X)=\min\{\infty \text{ 或 } \tau\},$$

其中 τ 为 $[0,\infty)$ 中使 τX 是 $\exp_x$ 在 M_x 中的共轭点的最小值. 粗糙地说，k 测量了沿 M_x 中每一射线从 O 到 $K(X)$ 的距离.

引理 2（**第一共轭轨迹的连续性**） 函数 k 是连续的.

证明 设在 S_x 中 $X_i\to X$. 我们必须证明 $k(X_i)\to k(X)$.

情形 1. $k(X)=\infty$. 于是只需证明 $\{k(X_i)\}$ 是无界的就行了. 假设存在一个子序列 $\{X_\alpha\}$，使得 $k(X_\alpha)<c_0$. 令 $\gamma_\alpha:[0,c_0]\to M$ 为正规测地线，由常微分方程的解关于初始条件的 C^∞ 依赖性知道，$\gamma_\alpha\rightrightarrows\gamma$（"$\rightrightarrows$" 表示一致收敛）. 因为 $k(X_\alpha)<c_0$，γ_α 包含一个共轭点，所以由 Morse 指数定理知道，对每一个 α，γ_α 的指数 $\geqslant 1$. 因为 $k(X)=\infty$，γ 没有共轭点，于是它的指标形式为正定的. 我们希望证明 γ 的指标形式 I_γ 连续地依赖于 γ. 如果证明了这一点，则所有邻近的 γ_α 的指数必须为零，因而产生矛盾. 为证此. 在 M_x 中固定一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，沿每一条 γ 及 γ_α 平行移动这组基，所以沿 γ 及 γ_α 我们得到了平行标架场，它们在 $x=\gamma_\alpha(0)=\gamma(0)$ 处是相同的. 利用这些标架场，对每一个 t，把切空间 $M_{\gamma(t)}$ 与 $M_{\gamma_\alpha(t)}$ 恒同，因此我们在每一条 γ 及 γ_α 上可以等同向量空间 $\mathfrak{V}_0(0,c_0)$，因而 γ_α 及 γ 的指标形式(分别表为 I_{γ_α} 及 I_γ) 可以认为是定义在相同的空间 $\mathfrak{V}_0(0,c_0)$ 上. 只要注意 §7 的 (7.4)就知道 $I_{\gamma_\alpha}\to I_\gamma$，于是由 I_γ 为正定(§7 引理 2) 就可知道对充分大的 α，I_{γ_α} 也是正定的，因而 I_{γ_α} 的指数为零，这就与前述 γ_α 的指数 $\geqslant 1$ 矛盾.

情形 2. $k(X)=c_0<\infty$. 令 γ, γ_α 如上，不过现在它们被定义在 $[0, c_0+\varepsilon](\varepsilon>0)$ 上. 现在 γ 的指数 $\geqslant 1$. 由上述连续性知道，当 α 充分大时，每个 γ_α 的指数也 $\geqslant 1$，于是对每一 $\varepsilon>0$，有 $k(X_\alpha)\leqslant c_0+\varepsilon$. 因此

$$\varlimsup_{\alpha\to\infty} k(X_\alpha)\leqslant c_0.$$

另一方面，再把 γ 及 γ_α 的定义域限制在 $[0, c_0-\varepsilon]$，因此 γ 的指标形式是正定的，于是对每个充分大的 α，γ_α 的指标形式也是正定的. 由此知道对每一 $\varepsilon>0$，有 $k(X_\alpha)\geqslant c_0-\varepsilon$. 于是

$$\varliminf_{\alpha\to\infty} k(X_\alpha)\geqslant c_0,$$

所以

$$\lim_{\alpha\to\infty} k(X_\alpha)=c_0.$$

证毕.

推论 3 x 在 M_x 中的第一共轭点全体是一个闭子集.

证明 假设 $\tilde{k}(X_i)\to Y$, $X_i\in S_x$. 令 $X=Y/|Y|$. 于是

$$|\tilde{k}(X)|=k(X)=\lim_i k(X_i)=|Y|.$$

由此得出 $\tilde{k}(X)=Y$. 证毕.

例 1 设 M 为 S^2 上接上一根管子后所形成的曲面，如图 10.1(a). 令 x 是北极点，于是第一共轭轨迹 $K(x)\subset M_x$ 看上去如图 10.1(b).

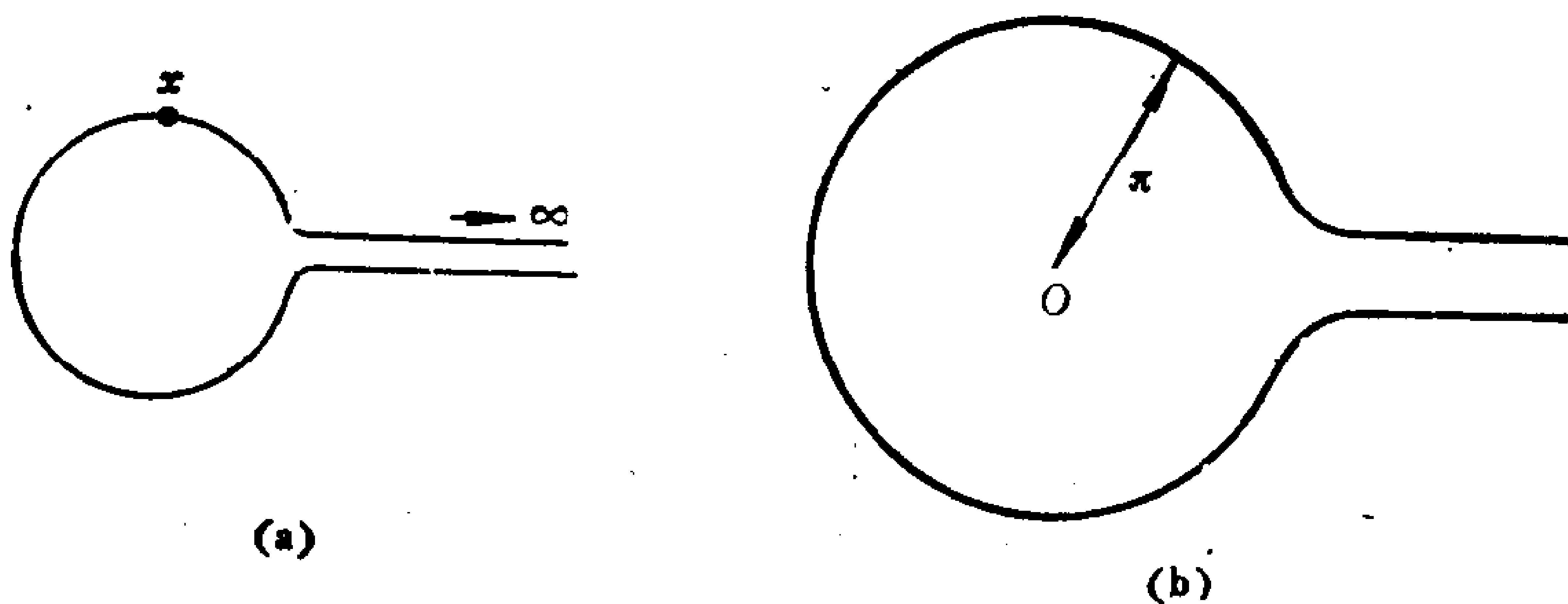
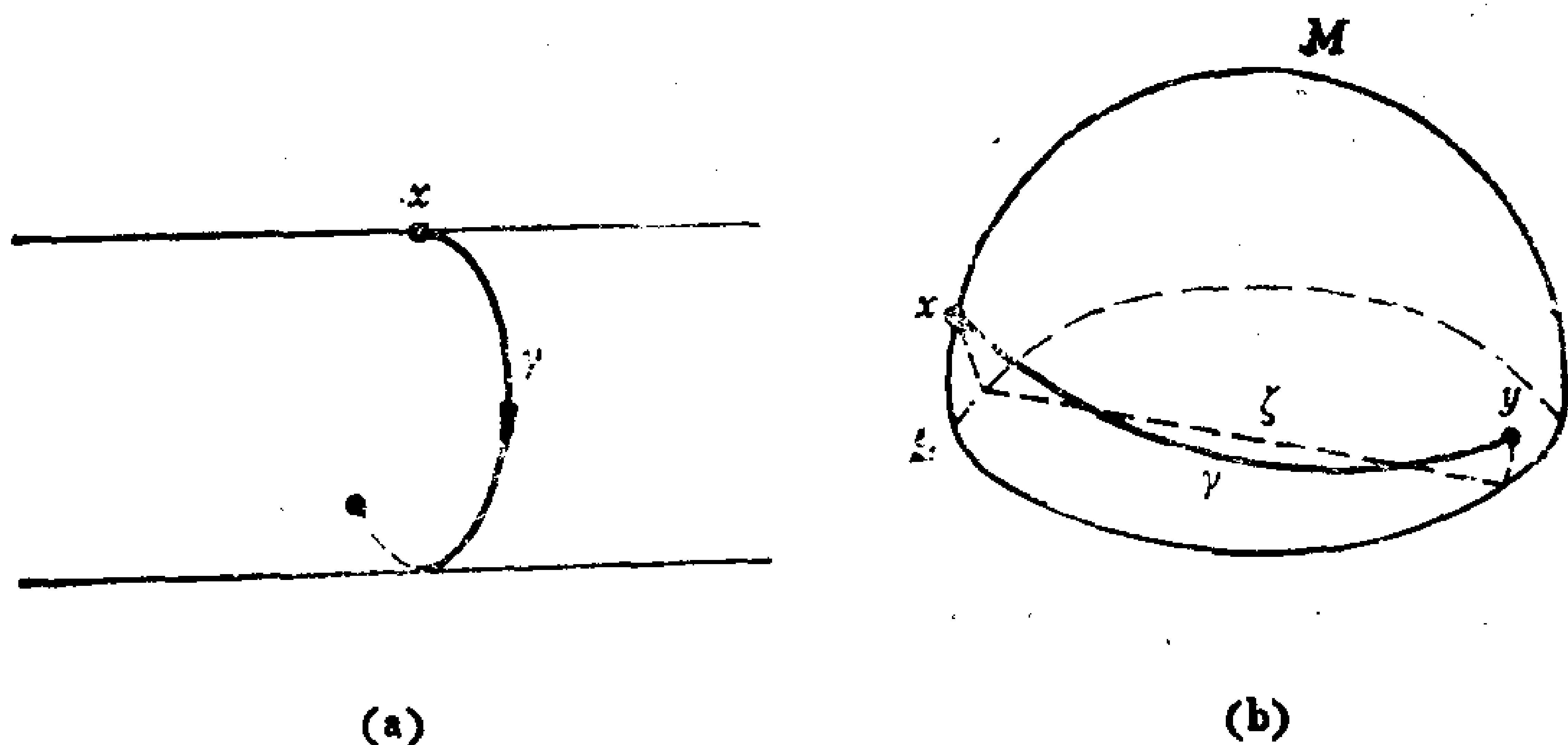


图 10.1

例 2 对柱面 $\{x^2+y^2=1, z\in \boldsymbol{R}\}$，利用 Cartan-Hadamard 定理知道对柱面上任何 x，有 $K(x)=\varnothing$。对 $\boldsymbol{R}^2$ 也有$K(x)=\varnothing$，$\forall x\in \boldsymbol{R}^2$。

例 2 是下述事实的一个特殊情形：如 φ：$M\to N$ 是一个局部等长，且 $\varphi(x)=y$，则 $d\varphi$：$M_x\to M_y$ 把 $K(x)$ 同胚地映到 $K(y)$ 上。

我们对第一共轭点感兴趣的部分原因是由于下列事实：一条测地线超过第一共轭点后就不是最短了，而在第一共轭点之前，测地线在邻近曲线中是最短的（分别见 §7 的引理 4 及引理 2）。但是例 2 表明了第一共轭轨迹并不对测地线的最短性产生足够的保证。例如柱面中的一些测地线(如图 10.2(a))没有共轭点，但显然是非最短的，虽然它相对于邻近曲线而言是最短的。这个现象不



(a)　　　　(b)

图 10.2

仅仅在第一共轭轨迹是空集的情况下才出现。考虑流形 M'，它是 $\boldsymbol{R}^3$ 中上半单位球的边界，即

$$M'=\left\{(x,y,z):\begin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=1, & \text{当 } z>0 \\ x^2+y^2\leqslant 1, & \text{当 } z=0 \end{array}\right\}.$$

现在沿边缘 $\{(x,y,0): x^2+y^2=1\}$ 将 M' 光滑化，从而得到一个 C^∞ 曲面 M，M 的顶部本质上是 S^2，第一共轭轨迹不是空集。取

邻近于边缘的两点 x 和 y，且令 γ 为邻近于边缘并连接 x 和 y 的一条测地线，如图 10.2(b)。设 γ 在 x 及 y 间无共轭点，则 γ 与邻近曲线相比是最短的，但是存在着一条从 x 先直接下到底部，然后从底部直达到 y 的下方，再向上到达 y 的曲线 ζ，其长度要比 γ 来得短。

从这些例子中人们有希望接受这样的一个事实，即没有一个一般性的判据来判定一条测地线是否为最短。我们导入一个定义。令 γ: $[0,\infty)\to M$ 为一条正规测地线。注意 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 是最短的充要条件是

$$d(\gamma(0),\gamma(t_0))=t_0(=L(\gamma|_{[0,t_0]})).$$

进而，如 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 为最短的，则对任何 $t<t_0$，$\gamma|_{[0,t]}$ 也是最短的。我们从 §3 的定理 2 又知道：对所有小的 t，$\gamma|_{[0,t]}$ 是最短的。于是或者对所有 $t>0$，$\gamma|_{[0,t]}$ 是最短的，或者存在 $t_0>0$，使得对任何 $t\leqslant t_0$，$\gamma|_{[0,t]}$ 是最短的，而对任何 $s>t_0$，$\gamma|_{[0,s]}$ 不是最短的。对于后者，我们称 $\gamma(t_0)$ 为 γ **关于 $\gamma(0)=x$ 的割点**，且称 $t_0\dot{\gamma}(0)$ 为 γ 的**切割点**。当 γ 在所有以 x 出发的正规测地线集合中变动时，γ 的所有割点全体称为 x 的**割迹**或**极小轨迹**，用 $\mathscr{C}(x)$ 表示；M_x 中相应的切割点的全体称为 **x 的切割迹**，记为 $C(x)$。注意：$\exp_x C(x)=\mathscr{C}(x)$。由 §7 的引理 4 知道，$\gamma$: $[0,b]\to M$ 的割点必须在第一共轭点之前来到，而且即使在 γ 上没有共轭点，也可能出现割点。例如，在例 2 中的柱面上的一点 x 的切割迹看上去像图 10.3 所画的那样。而它的第一共轭轨迹当然是空集。另一个例子则提供了一个强烈的对照：在 S^n 上，每点 x 的割迹及第一共轭轨迹是相同的，而且它们在 S^n_x 中相应的切割迹及第一共轭轨迹也是相同的。

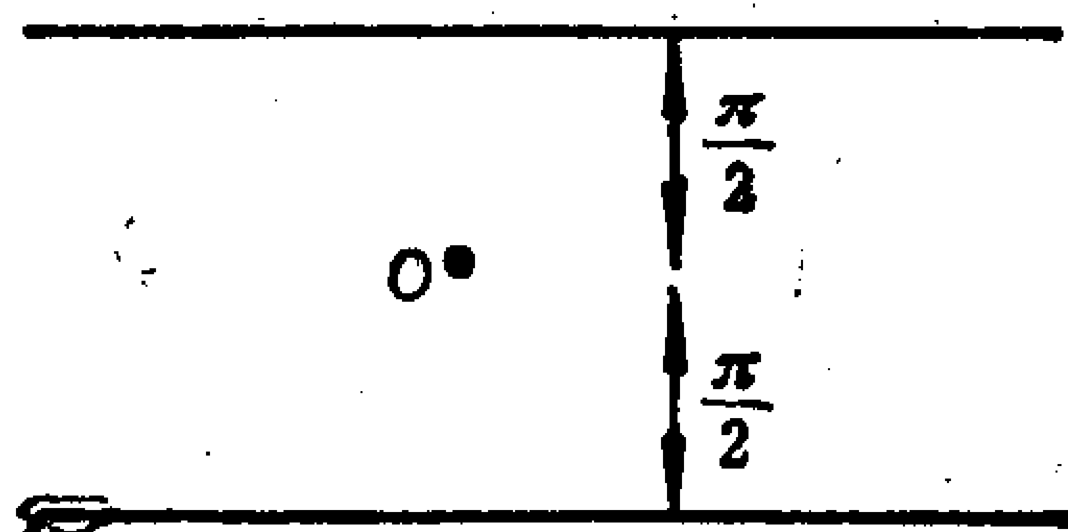


图 10.3

习题 1. 给出一个紧致黎曼流形 M 的例子，使得对某点 $x\in M$，M_x 中的切割迹及 M_x 中的第一共轭轨迹都是非空集，但它们是各不相同的。

习题 2. 一条正规测地线 γ: $[0,\infty)\to M$ 被认为是**最短的**，当且仅当对每一$t\geqslant 0$，$\gamma|_{[0,t]}$ 是最短的。证明完备黎曼流形 M 是非紧的充要条件是：对每点 $x\in M$，存在一条最短的测地线 γ: $[0,\infty)\to M$，使得 $\gamma(0)=x$.

下面的引理连同它的证明清楚明白地显示了割点的意义。

引理 4 设 $\gamma(t_0)$ 是一条正规测地线 γ: $[0,b]\to M(\gamma(0)\equiv x)$ 的割点，则至少下列两件事中之一成立:

(1) $\gamma(t_0)$ 是 x 沿 γ 的第一共轭点；或者

(2) 存在另一条与 γ 不相同的测地线 σ，它连接 x 到 $\gamma(t_0)$，并满足 $L(\sigma)=t_0(=L(\gamma|_{[0,t_0]})$，而且 t_0 是发生这种情况中 t 的最小值.

证明 设 $\{t_i\}$ 是一个序列，使得 $t_i\downarrow t_0$，且设 σ_i 是一条连接 x 至 $\gamma(t_i)$ 的最短的正规测地线，使得

$$L(\sigma_i)<t_i(=L(\gamma|_{[0,t_i]}))$$

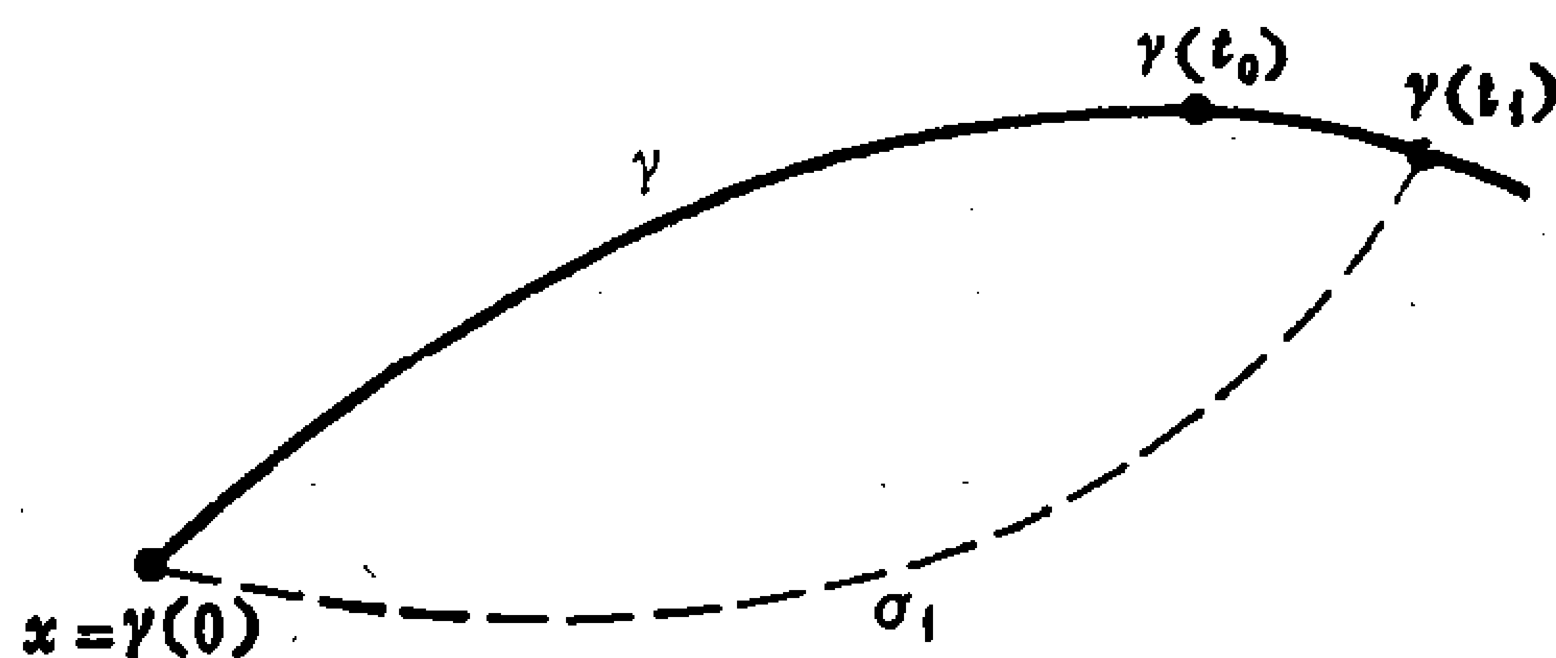


图 10.4

(图 10.4). 对任一 i，$\sigma_i(0)=x$，于是 $\{\dot\sigma_i(0)\}$ 是 M_x 中一个单位向量的序列. 因为 M_x 中的单位球面是紧致的，我们可以假设(如果有必要，可选取子序列)

$$\dot\sigma_i(0)\to X\in M_x,$$

其中 $|X|=1$. 设 σ 是测地线，且 $\dot\sigma(0)=X$，所以由常微分方程中的定理知道 $\sigma_i\rightrightarrows\sigma$. 因此 σ 连接 x 至 $\gamma(t_0)$.

情形 1. $X=\dot\gamma(0)$. 于是 $\sigma_i\rightrightarrows\gamma|_{[0,t_0]}$. 设 $\sigma_i(s_i)=\gamma(t_i)$，于

是由 $L(\sigma_i)<t_i$ 得到 $s_i<t_i$，所以在 M_x 中

$$s_i\dot{\sigma}_i(0)\neq t_i\dot{\gamma}(0).$$

但另一方面，

$$\exp_x(s_i\dot{\sigma}_i(0))=\gamma(t_i)=\exp_x(t_i\dot{\gamma}(0)),$$

所以 $\exp_x$ 在 $t_0\dot{\gamma}(0)$ 的一个邻域中不是一对一的，因而 $d\exp_x$ 在 $t_0\dot{\gamma}(0)$ 处为奇异，于是 $\gamma(t_0)$ 沿 γ 共轭于 x.

情形 2. $X\neq\dot{\gamma}(0)$. 因此 σ 与 γ 是不相同的两条测地线. 一方面，由连续性知

$$L(\sigma)=\lim_i L(\sigma_i)\leqslant\lim_i t_i=t_0.$$

另一方面，因为 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 是最短的，所以

$$L(\sigma)\geqslant L(\gamma|_{[0,t_0]})\geqslant t_0.$$

于是得出 $L(\sigma)=t_0$. 如在某个 e 处(其中 $0<e<t_0$)，存在一条与 $\gamma|_{[0,e]}$ 不同的，连结 x 至 $\gamma(e)$ 的测地线 ζ，而且 $L(\zeta)=e$，于是存在着一条从 x 出发先沿着 ζ，接着沿图 10.5 中的虚线(为了使 $\gamma(e)$ 处的尖角光滑化)，再紧接着沿 γ，最后到达 $\gamma(t_0)$ 的曲线，其长度 $<L(\gamma|_{[0,t_0]})$，这与 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 的最短性矛盾. 证毕.

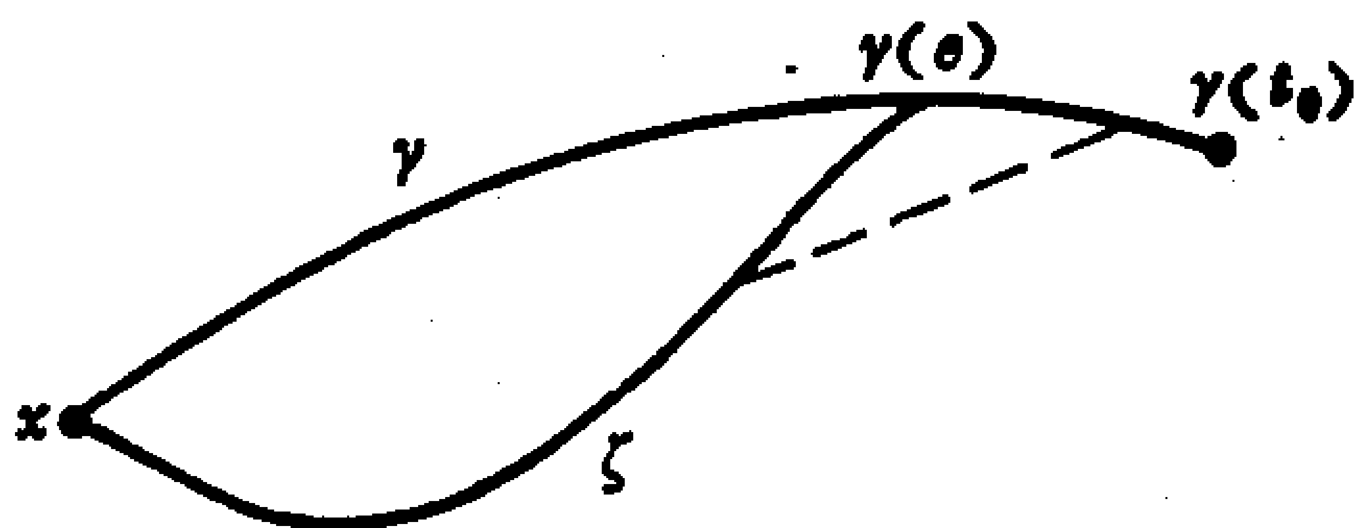


图 10.5

现在定义一个函数 τ: $S_x\to[0,\infty]$，(S_x 是上述 M_x 中的单位球面)为

$$\tau(X)=\begin{cases}\infty, & \text{如果 } \dot{\gamma}_X(0)=X \text{ 的测地线 } \gamma_X:\ [0,\infty)\to M \\ & \text{没有割点,} \\ t_0, & \text{如果 } \gamma_X(t_0) \text{ 是 } \gamma \text{ 的割点.}\end{cases}$$

割点在第一共轭点之前到达的事实可表为 $\tau\leqslant k$，这里 k 如引理 1 中所述. 类似于引理 1，我们有

引理 5（割迹的连续性） 函数 τ 是连续的.

证明 设有 $X_1,X_2,\cdots\in S_x$，$\lim\limits_{i\to\infty}X_i=X\in S_x$，我们要证明

$$\lim_{i\to\infty}\tau(X_i)=\tau(X).$$

令 $t_i=\tau(X_i)$，又令 γ_i: $[0,t_i]\to M$ 由下式确定

$$\gamma_i(t)=\exp_x tX_i.$$

我们来考察 $\{t_i\}$ 的任一收敛子序列 $\{t_{n_i}\}$，$t_{n_i}\to t_0$。 由于 $t_{n_i}\to t_0$ 与 $X_{n_i}\to X$，故 $\gamma_{n_i}\to\gamma$，其中 γ: $[0,t_0]\to M$: $t\longmapsto\exp_x tX$. 由于 γ_{n_i} 是最短正规测地线，所以 γ 也是最短正规测地线，从而 $t_0\leqslant\tau(X)$。下面分两种情形证明 $t_0=\tau(X)$.

(1) 假若 $\gamma(t_0)$ 是 x 沿着 γ 的共轭点，显然 $\tau(X)\leqslant t_0$，于是

$$t_0=\tau(X).$$

(2) 假若 $\gamma(t_0)$ 不是 x 沿着 γ 的共轭点，那么 $\gamma(t_0)$ 不可能是共轭点的极限点，因此不妨假定诸 $\gamma_{n_i}(t_{n_i})$ 皆不是 x 的共轭点. 用引理 4 可知存在 $Y_{n_i}\in S_x$ 使得

$$Y_{n_i}\neq X_{n_i},\quad \exp_x t_{n_i}Y_{n_i}=\exp_x t_{n_i}X_{n_i}.$$

由于 S_x 是紧致的，故 $\{Y_{n_i}\}$ 中必有一子列收敛到 Y。不妨 $Y_{n_i}\to Y$。我们来证明 $Y\neq X$。 因为 $\gamma(t_0)$ 不是共轭点，由反函数定理知，$\exp_x$: $M_x\to M$ 在 t_0X 点附近是局部同胚的. 此时如 $X=Y$，则必存在充分大的 n_i，使 $t_{n_i}X_{n_i}$ 与 $t_{n_i}Y_{n_i}$ 同时落在这个 t_0X 的局部同胚的邻域内，它们的 $\exp_x$ 像相等，从而 $t_{n_i}X_{n_i}=t_{n_i}Y_{n_i}$，故 $X_{n_i}=Y_{n_i}$. 这与上面对 Y_{n_i} 的取法矛盾. 至此我们可知 $Y\neq X$. 若令 $\sigma(t)=\exp_x tY$，那么 γ 与 σ 就是连 x 至 $\gamma(t_0)$ 的两条最短测地线。由引理 4 可知，$\gamma(t_0)$ 是 x 沿着 γ 的割点，即有 $\tau(X)=t_0$。

因为 $\{t_i\}$ 中收敛子列皆满足

$$\lim_{n_i\to\infty}\tau(X_{n_i})=\lim_{n_i\to\infty}t_{n_i}=t_0=\tau(X),$$

故

$$\lim_{i\to\infty}\tau(X_i)=\tau(X).$$

这就证明了引理. 证毕.

作为推论，对任何 $x\in M$，$\mathscr{C}(x)$ 及 $C(x)$ 可分别被看成是

M，M_x 的闭子集。另一个推论是

引理 6 完备黎曼流形 M 是紧致的充要条件是对任何 $x \in M$，切割迹 $C(x)$ 同胚于单位球面 $S_x \subset M_x$。

证明 如 M 紧致，令 $d(M) = \delta$. 于是正规测地线

$$\gamma:\ [0, \infty) \to M \quad (\gamma(0) = x)$$

越过 δ 后就不能最短了，特别，$\gamma|_{[0,\delta+1]}$ 不能是最短的. 于是 $\tau < \delta + 1$，因此由 $\beta(X) = \tau(X)X$ 所给出的 β: $S_x \to C(x)$ 是一个同胚. 反之，如果 $C(x)$ 同胚于 S_x，则 $C(x)$ 紧致. 设

$$A \equiv \tau^{-1}([0, \infty)) \subset S_x,$$

于是由 $\beta(X) = \tau(X)X$ 所定义的映射 β: $A \to C(x)$ 是一个同胚. 因此 A 是一个紧致集，于是 A 在 S_x 中为闭. 但由引理 5，A 在 S_x 中为开，所以 $A = S_x$。令

$$\delta = \max_{X \in S_x} \tau(X),$$

则 $d(M) = \delta$，而且 M 为紧致. 证毕.

又注意到，每条射线 $r(X)(X \in S_x)$ 与 $C(x)$ 至多相交于一点，故由 Fubini 定理得到

引理 7 M_x 中的切割迹是一个零测度集，$\forall x \in M$。

习题 3. 测地线 γ: $[0, b] \to M$ 是稳定最短的（见 §8 中在 Hessian 比较定理前面所给出的定义）的充要条件是 γ 不包含割点.

现在我们要进一步弄清楚早在 §8 中就导入的关于紧致流形 M 的单一半径 $i(M)$ 的概念. 首先设 M 是完备的，且令 $x \in M$。定义 M_x 中的子集

$$\Sigma(x) \equiv \{tX:\ X \in S_x \text{ 及 } t \in [0, \infty), \text{并满足 } t < \tau(X)\}$$

为**切割迹 $C(x)$ 的内部**. 现在称数

$$\delta(x) = \sup\{d:\ M_x \text{ 中半径为 } d \text{ 的开球，它位于 } \Sigma(x) \text{ 之中}\}$$

为 **M 在 x 处的单一半径**. 注意，由 §3 中的定理 2 知道 $\delta(x) > 0$. 为了进一步理解 $\delta(x)$，我们要证明

引理 8 $\exp_x: \Sigma(x) \to M$ 是一个嵌入.

证明 因为 M_x 中的第一共轭轨迹是在切割迹 $C(x)$ 之外，所以 $d\exp_x$ 在 $\Sigma(x)$ 上是非异的．现在再证明 $\exp_x$ 在 $\Sigma(x)$ 上是一对一的．如果不是这样，则存在 $X_1, X_2 \in S_x$, $X_1 \neq X_2$，使得

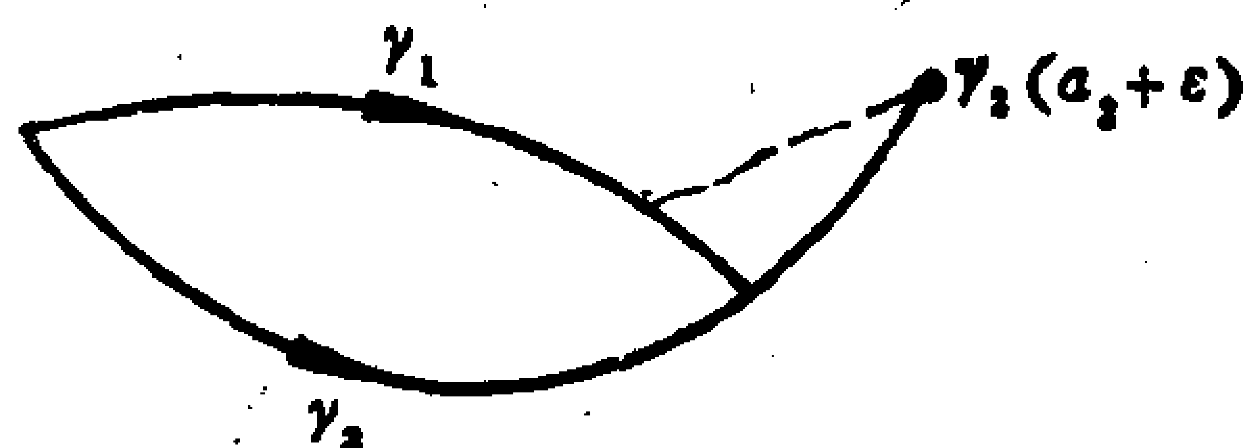


图 10.6

$$\exp_x a_1 X_1 = \exp_x a_2 X_2,$$

这里 $a_1, a_2 > 0$, $a_i < \tau(X_i)$, $i = 1, 2$．设 $a_1 \leqslant a_2$，ε 充分小，使得 $a_2 + \varepsilon < \tau(X_2)$．令 $\gamma_1:[0, a_1] \to M$ 及 γ_2: $[0, a_2+\varepsilon] \to M$ 分别为满足 $\dot{\gamma}_1(0) = X_1$, $\dot{\gamma}_2(0) = X_2$ 的正规测地线．则由 γ_1 开始，接着再取图 10.6 中带虚线的测地线所合成的曲线是一条连接 $\gamma_2(0)$ 至 $\gamma_2(a_2+\varepsilon)$ 的曲线，其长度严格地比 γ_2 小，这与 γ_2 的最短性矛盾．证毕．

引理 8 表明 $\exp_x$ 在 M_x 中的半径为 $\delta(x)$ 的球上是一个微分同胚．引理 4 表明，没有更大的球会具有此性质．其次可用与引理 5 同样的方法证明 $\delta(x)$ 是 x 的连续函数(见 [CE]，命题 5.4 或 [GKM]，第 170 页)．于是我们看到，对紧致的 M 有

$$i(M) = \min_{x \in M} \delta(x).$$

对紧致的 M，令 $x \in M$，我们从 § 3 的推论 7 知

$$\exp_x\colon\ \Sigma(x) \cup C(x) \to M$$

是满的．由引理 8 知

$$\exp_x\colon\ \Sigma(x) \to \exp_x \Sigma(x)$$

是微分同胚，而由定义知 $\exp_x C(x) = \mathscr{C}(x)$($= x$ 的割迹)．因为 $M = (\exp_x \Sigma(x)) \cup \mathscr{C}(x)$，(这里 $\cup$ 表示不相交的和)，同时 $\Sigma(x)$ 显然是微分同胚于单位球，所以我们看到：每一个紧致流形 M 是一个嵌入开球和一点的割迹的不相交和集．又因为 $\Sigma(x) \cup C(x)$ 同胚于闭单位球，于是每一个紧致流形可从一个闭的单位球通过对边界球面上作出某些迭合而被得到．

在结束本节之前，我们再谈一下有关的参考文献．共轭轨迹

$K^*(x)$ 的结构比我们粗看上去要好得多，见[W4]. $C(x)$ 和 M_x 中第一共轭轨迹 $K(x)$之间的关系显然是一个很感兴趣的内容.对于单连通对称空间，$K(x) = C(x)$,这是 Crittendon 的一个**定理**(见[CE],第 102 页)，而每一个紧致单连通的流形(但不是 S^2)能允许一个黎曼度量,使得对某点 x 有 $K(x) \cap C(x) = \varnothing$,(见下面的习题 4),这是 A. Weinstein 的一个**定理**(见 [W6]).对这些轨迹的较老的文献,可看 S. Kobayashi 的解释性的论文(见[K5]). 最后、关于紧致M的 $i(M)$ 的下界估计对于球面定理来说是极其关键的(见 §8 中的 Klingenberg 定理). [CE]的第五节中证明了一组这类估计.

习题 4. 设黎曼流形M微分同胚于单位 2-球面 S^2，则对任何 $x \in S^2$，有 $K(x) \cap C(x) \neq \varnothing$. (有几种方法可证,其中一个需要用到 Jordan **曲线定理**: S_2 上同胚于 S^1 的曲线 γ 正好分 S^2 成两个开集,而且 γ 为它们的公共边界.读者可以假定这个定理成立.)

§11 测度与积分

本节参考文献

[KN, I]，附录 6。

[BC]，　§11.10。

对于任何一位写过微分流形导引的作者来说，**积分论**自然是指：C^∞ 微分式的积分，定向流形上连续函数的黎曼积分和 Stokes 定理。但是近代几何中每一个重大的工作似乎都充分使用了**测度论**。至少要用 L^p 空间，要用由余维为 p 的子流形(流)确定的 p 微分式上的测度等等．所以我们还要至少涉及最初等的测度论．一旦做了这件事后，你就会看到在做函数积分时，惯常假定流形是可定向的这一要求是完全多余的。目前好像没有一本微分几何书充分地处理这方面的内容。

我们讲这节时，必须先假定一些测度论知识，特别是 Daniell **积分**。这方面好的参考书是：[Z]，[F1]，[RN]，[AB2]。当然有许多别的书也合适。注意，[F1] 是一本百科全书，可经常翻阅但不可读；[AB2] 既初等写得又好，值得更好地了解。

设M是一个 n 维黎曼流形(不假定它是定向或紧致的)，又设 $\mathscr{U}$ 是一个坐标邻域，$\{x^i\}$ 是 $\mathscr{U}$ 中的坐标函数，黎曼度量在 $\{x^i\}$ 下表为

$$\sum_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

令 $G=\det[g_{ij}]$ (det 表矩阵的行列式)。须知 $G>0$ 并在 $\mathscr{U}$ 中是 C^∞ 的。把M上带**紧致支集**的连续函数所组成的向量空间记做

$C_0^0 \equiv C_0^0(M)$. 对于支集在 $\mathscr{U}$ 中的 $f \in C_0^0$, 定义

$$\int_{\mathscr{U}} f \equiv \int_{\mathscr{U}} f\sqrt{G}\, dx^1 \cdots dx^n, \tag{11.1}$$

其中右式是欧氏空间中的通常积分. 标准的计算表明 $\int_{\mathscr{U}} f$ 的定义不依赖于 $\{x^i\}$ 的选取, 所以定义是合理的. 换一种等价的说法, 设 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 中某个一次微分式幺正基(即黎曼度量可表为 $\sum_i \omega^i \cdot \omega^i$),那么对任意 $f \in C_0^0$, 当 f 的支集在 $\mathscr{U}$ 中, $f \geqslant 0$ 时,就有

$$\int_{\mathscr{U}} f = \left|\int_{\mathscr{U}} f\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n\right|. \tag{11.2}$$

这件事可由初等讨论得到. 对于支集在 $\mathscr{U}$ 中的任意 $f \in C_0^0$,令

$$\begin{cases} f^+ = \max\{f, 0\}, \\ f^- = \max\{-f, 0\}. \end{cases} \tag{11.3}$$

那么也容易验证

$$\int_{\mathscr{U}} f = \left|\int_{\mathscr{U}} f^+\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n\right| - \left|\int_{\mathscr{U}} f^-\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n\right|. \tag{11.4}$$

为着以后参考,我们写下一个对证明(11.2), (11.4)有帮助的公式

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n = \pm\sqrt{G}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{11.5}$$

对于一般的 $f \in C_0^0$. 利用 (11.1) 及一个单位分解来定义 $\int_M f$. 设 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 M 的一个局部有限坐标邻域覆盖,令 $\{\varphi_i\}$ 是从属于 $\{\mathscr{U}_i\}$ 的一个单位分解,即对任意的 i,有 $\varphi_i \geqslant 0$, φ_i 的支集在 $\mathscr{U}_i$ 中并且 $\sum\varphi_i \equiv 1$. 定义

$$\int_M f \equiv \sum_i \int_{\mathscr{U}_i} (\varphi_i f). \tag{11.6}$$

须知 f 的支集 (记作 Supp. f) 是紧致的, 故(11.6)中和式是有限和. 为了证明 $\int_M f$ 的定义是合理的,那就要验证 (11.6) 的右端与

$\{\mathscr{U}_i\}$，$\{\varphi_i\}$的选取无关(参阅[S8, 1]第8—23页)．关于$\varphi_i \geqslant 0$的假设使得下列事很显然了．如果 $f \in C_0^0$ 并且 $f \geqslant 0$，则

$$\int_M f \geqslant 0$$

(其实证此事、$\varphi_i \geqslant 0$不是绝对必要的)．

于是我们就有一个**正线性泛函** $\mathscr{T}: C_0^0 \to \boldsymbol{R}$，使得

$$\mathscr{T}(f) = \int_M f.$$

这里称泛函是正的，那表示：从 $f \geqslant 0$ 可推出 $\mathscr{T}(f) \geqslant 0$．由著名的 Riesz **表现定理**可知，在$M$上存在唯一的 Borel **测度** dv 使得对任意 $f \in C_0^0$，有

$$\int_M f = \int_M f dv. \tag{11.7}$$

由于有了测度 dv、测度论的标准机器就能开动了．但是我们停下来简单勾划如何得到 dv，这也许是有益的．

首先认清 C_0^0 是一个**向量格**，即它是一个 $\boldsymbol{R}$ 上向量空间使得对于任意的 $f, g \in C_0^0$，有

$$f \vee g \quad 与 \quad f \wedge g \in C_0^0,$$

其中 $f \vee g = \max\{f, g\}$，$f \wedge g = \min\{f, g\}$．接着看到线性泛函 $\mathscr{T}$ 满足

(1) 对于任意 $f, g \in C_0^0$ 和任意 $a, b \in \boldsymbol{R}$，

$$\mathscr{T}(af + bg) = a\mathscr{T}(f) + b\mathscr{T}(g);$$

(2) 对于任意 $f \in C_0^0$，$f \geqslant 0$，则 $\mathscr{T}(f) \geqslant 0$；

(3) 如果 $\{f_i\} \subset C_0^0$，且 $f_i \downarrow 0$ (点点单调下降趋于零)，则

$$\mathscr{T}(f_i) \to 0.$$

为了证明上面(3)，人们可以求助于通常的 Lebesque **积分单调收敛定理**(在 C_0^0 中所有合理的积分都是一样的．特别地，我们在(11.1)中采用 Lebesque **积分**)．按照定义，$\mathscr{T}$ 可以说成是 C_0^0 上的 Daniell **积分**． 下一步是将泛函扩充到一个大一些的空间

$L^1_+(M)\supset C^0_0$上，其中

$$L^1_+(M)=\{f\colon f\text{是}M\text{上的函数，它是}C^0_0\text{中某一单调上升序列的极限}\}.$$

对于 $h\in L^1_+(M)$，令 $f_i\uparrow h$，$f_i\in C^0_0$，于是定义

$$\mathscr{T}(h)=\lim_i \mathscr{T}(f_i) \tag{11.8}$$

（这个定义的合理性本质上等价于 Beppo Levi **定理**）。这时人们必须证明这个定义不依赖于 f_i 的选取。由此我们也就知道：如果 $h\in C^0_0$，则由（11.8）定义的 $\mathscr{T}(h)$ 就与原来的 $\mathscr{T}(h)$ 一致。为证此事，须要(2)与(3)。最后来定义 $L^1(M)$ 如下。如果 k 是M上的一个函数，定义 k 的上、下积分分别为

$$\overline{\mathscr{T}}(k)\equiv\inf_{\substack{h>k\\ h\in L^1_+}}\mathscr{T}(h),\quad \underline{\mathscr{T}}(k)\equiv\sup_{\substack{h<k\\ h\in L^1_+}}\mathscr{T}(h).$$

定义 $k\in L^1(M)$ 当且仅当 $\overline{\mathscr{T}}(k)=\underline{\mathscr{T}}(k)$（也可说，这个定义基本上是为保证 Lebesque **有界收敛定理成立**）。可以验证

$$L^1(M)\supset L^1_+(M).$$

此时对于任意 $k\in L^1(M)$，定义 $\mathscr{T}(k)\equiv\overline{\mathscr{T}}(k)$ $(=\underline{\mathscr{T}}(k))$，又可验证如此的 $\mathscr{T}$ 是 $L^1_+(M)$ 上的 $\mathscr{T}$ 的扩充。$L^1(M)$ 称为**可积函数**空间。这时我们就可用通常的方式定义$L^p(M)$，$0<p\leqslant\infty$。为了得到**测度**，先给下列一些定义。M 上的**函数** f 称为是**可测的**，**如果它被** C^0_0 中每一正元素截断后是 $L^1(M)$ 中函数，即对任意 $h\in C^0_0$，使得 $h\geqslant 0$，则

$$f^+\wedge h\in L^1(M),\quad f^-\wedge h\in L^1(M),$$

其中 f^+ 与 f^- 的定义见(11.3)。一个**子集** $E\subset M$ 称为是**可测的**，如果它的**特征函数** χ_E 是可测的，其中 $\chi_E\colon M\to\boldsymbol{R}$ 定义为

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

对于一个可测集 E，它的**测度** $V(E)$ 定义为 ∞ 或 $\mathscr{T}(\chi_E)$，视

$\chi_E \bar{\in} L^1(M)$ 或 $\in L^1(M)$ 而定. 由测度 V 确定的**积分**与 $L^1(M)$ 上的泛函 $\mathscr{T}$ 是一回事, 这就是现今标准的**测度理论**.

从现在开始, 对任意 $k \in L^1(M)$ 就可记 $\mathscr{T}(k)$ 为

$$\mathscr{T}(k) \equiv \int_M k \mathrm{d}v.$$

当 M 是可定向时, 设 ω 是一个 n 次微分式, 它确定 M 的定向. 那么通常从黎曼度量构造出 M 上的一个 n 次微分式 Ω (称为**体积元**) 如下: 如果 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 M 的任意局部幺正标架场, 适合 $\omega(e_1, \cdots, e_n) > 0$, 那么 $\Omega(e_1, \cdots, e_n) = 1$ (可以验证如此的 Ω 是存在唯一的). 换句话说, 设 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$ 是 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的**对偶标架场**, 则 $\Omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$. 由于(11.5), 对于任意 $f \in C_0^0$ 显然有

$$\int_M f \mathrm{d}v = \int_M f\Omega.$$

注意这个等式的左端是我们刚定义过的积分, 而右端则是通常的**微分式积分**. 如果 E 是 M 的可测子集, 习惯上称 $V(E)$ 为 E 的**体积**, 于是

$$V(E) = \int_E 1 \mathrm{d}v.$$

由 Sard **定理**可知: C^∞ 映射将零测度集合变为零测度集合 (映射是在同维数空间之间的), 于是从 §10 中引理 1 和引理 7 可得: M 中 x 的第一共轭轨迹 $\mathscr{A}(x)$ 与割迹 $\mathscr{C}(x)$ 皆是 M 中零测度子集. 现在再由 §10 定理 8 及其前后的注记可知:

$$\int_M f \mathrm{d}v = \int_{M-\mathscr{C}(x)} f \mathrm{d}v = \int_{\exp_x \Sigma(x)} f \mathrm{d}v. \tag{11.9}$$

由于 $\exp_x$: $\Sigma(x) \to M$ 是一个 C^∞ 嵌入, $\Sigma(x)$ 又总是微分同胚于一个开球(按照定义, $\Sigma(x)$ 是一个关于 $O \in M_x$ 的**星状区域**), 故可知流形上的每一个积分皆可约化为单位球上的积分. 一方面, 这是一个有用的观察, 下面即将用到; 另一方面, 因为不论 M 是否可

定向,(11.9)总是成立的，所以这就给出马后炮式的解释：为什么一个流形的可定向性与积分论中的问题无关.

例 1 考虑实射影平面 P_2R(§6 习题 4)，它可看作为 S^2 中闭的上半球面迭合赤道上的对径点所成的空间. 由于赤道是零测的(所有低维流形皆是零测集),所以

$$V(P_2R)=V(S^2\text{ 中开的上半球面})=2\pi.$$

我们接下来就讨论积分论中的一些标准问题：Green-Stokes **定理**，**推广的** Fubini **定理**和**测地球的体积**. 作为它们的一个应用，将证明最大直径定理，这在第 138 页和 161 页提到过的. 很遗憾,我们不能在此谈点非紧流形上 L^p 次调和函数的内容.

设 X 是 M 上一个向量场(再提一句,对 M 不作特别的假设),下面我们来定义 M 上一个 C^∞ 函数 $\operatorname{div}X$，称为 X 的**散度**. 设 $\mathscr{U}$ 是一个 M 的坐标邻域(它当然是可定向的!)，根据 $\mathscr{U}$ 的一个定向，我们可决定 $\mathscr{U}$ 上一个体积元 Ω_0(它是 $\mathscr{U}$ 上 n 次微分式，造法与第 196 页的相同，若 $\mathscr{U}$ 取另一定向，则决定的体积元是 $-\Omega_0$),那么在 $\mathscr{U}$ 内令

$$(\operatorname{div}X)\Omega_0\equiv d\{i(X)\Omega_0\},\tag{11.10}$$

其中 $i(X)$ 是对 X 做**内乘**,即对向量 $Y_1,\cdots,Y_{n-1}$,

$$(i(X)\Omega_0)(Y_1,\cdots,Y_{n-1})\equiv\Omega_0(X,Y_1,\cdots,Y_{n-1}).$$

注意: $\mathscr{U}$ 中的体积元有两个 Ω_0, $-\Omega_0$，但由(11.10)定义的 $\operatorname{div}X$ 不受体积元选取的影响. 所以 $\operatorname{div}X$ 是定义在 M 上的函数. 由此可见不论 M 是否可定向, $\operatorname{div}X$ 总是可定义的(在 [KN, I]附录 6 中 $\operatorname{div}X$ 只对定向流形来定义).

例 2 令 $M=R^n$, $\Omega_0=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, $X=\sum_i X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

回忆 $i(X)$ 在微分式上作用是一个**反称导算子**(见 [KN, I]，第 35 页),故

$$i(X)\Omega_0=\sum_i X^i\left\{i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)\right\}$$

$$=\sum_i(-1)^{i+1}X^i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中上方记号"∧"表示删去它下面的项。进而

$$di(X)\Omega_0=\sum_i(-1)^{i+1}\frac{\partial X^i}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\left(\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right)\Omega_0.$$

因此 $\operatorname{div}X=\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^i}$，这恰是经典的向量场的散度。

Green **定理** 假设M是紧致定向黎曼流形，并且有 C^∞ 边界 ∂M，令 n 是定义在 ∂M 上的外向单位法向量场，那么对于任意 M 上的向量场 X，有

$$\int_M(\operatorname{div}X)dv_M=\int_{\partial M}\langle X,n\rangle dv_{\partial M},$$

其中 dv_M 与 $dv_{\partial M}$ 分别表示黎曼流形 M，∂M 上的标准测度。

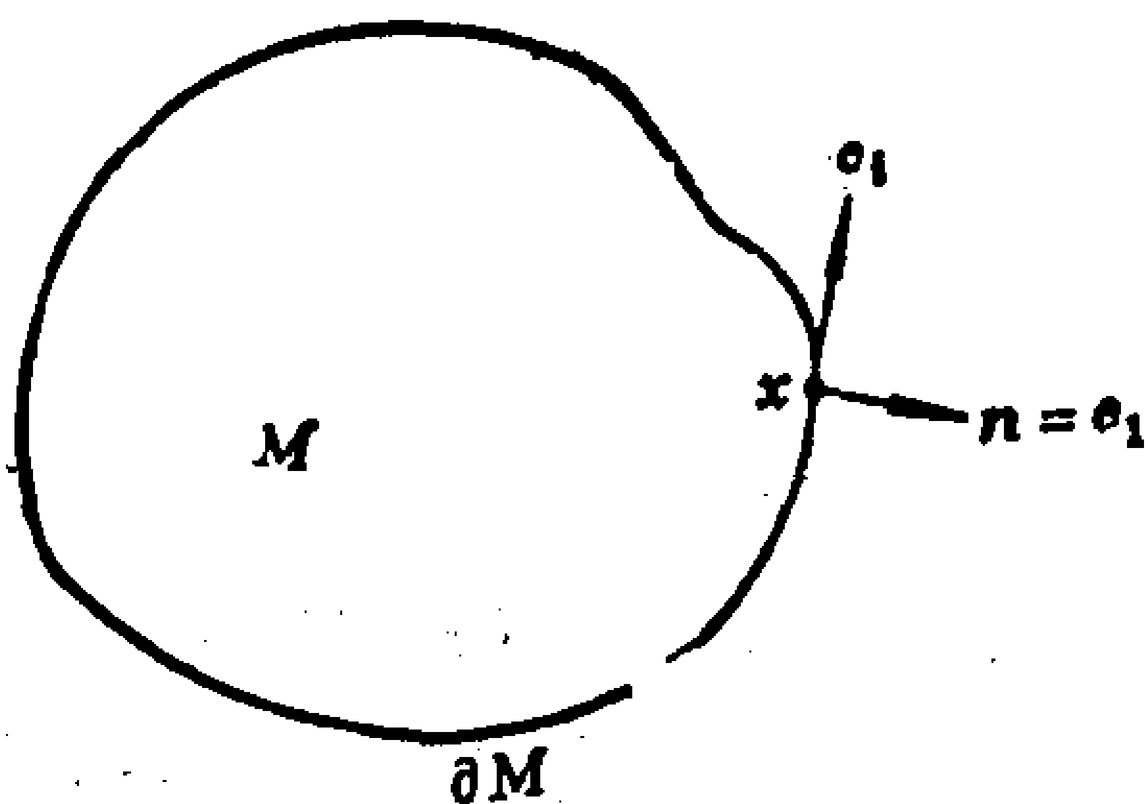


图 11.1

证明 令 Ω_M 是M的体积元，在 $x\in\partial M$ 处，选 M_x 的定向幺正基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 使得 $n=e_1$（见图 11.1），设 $\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$ 是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 的对偶基。于是由定义，M 与 ∂M 的体积元分别是

$$\Omega_M(x)=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n,\quad \Omega_{\partial M}(x)=\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n.$$

注意到在 x 处

$$i(X)\Omega_M=i(X)(\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n)$$

$$=\omega^1(X)\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n+(\text{包含 }\omega^1\text{ 的项})$$

$$=\langle X,n\rangle\Omega_{\partial M}+(\text{包含 }\omega^1\text{ 的项}),$$

所以

$$\int_M (\operatorname{div} X) \mathrm{d}v_M = \int_M \mathrm{d}(i(X)\Omega_M) = \int_{\partial M} i(X)\Omega_M$$

$$= \int_{\partial M} \langle X, n \rangle \Omega_{\partial M}$$

$$= \int_{\partial M} \langle X, n \rangle \mathrm{d}v_{\partial M}.$$

证毕。

推论 1 设M是一个可定向完备的黎曼流形，X是M上一个具有紧致支集的向量场，则

$$\int_M (\operatorname{div} X) \mathrm{d}v_M = 0.$$

习题 1. 试给出推论 1 的详细证明.

习题 2. 试证对紧致无边界的黎曼流形M(不必可定向)，及其上一个向量场X，仍有

$$\int_M (\operatorname{div} X) \mathrm{d}v_M = 0.$$

上述推论通常出现在一个比较特别的情形里，即X是一个函数的梯度向量场的情形. 设f是一个函数，它的**梯度** $\operatorname{grad} f$ 是一个向量场，定义如下：对任意向量场Y，

$$\langle \operatorname{grad} f, Y \rangle \equiv Yf.$$

在$\boldsymbol{R}^n$中上式给出的

$$\operatorname{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right),$$

这就是通常的梯度.

平常在黎曼流形中，我们可以说向量场X**对偶**于某个一次微分式η，这是指：对任意向量场Y，

$$\langle X, Y \rangle = \eta(Y).$$

对于向量场的线性函数，通常可定义模的概念，故η就有模$|\eta|$. 用这种语言来说，$X \equiv \operatorname{grad} f$对偶于$\mathrm{d}f \equiv \mathrm{D}f$ (因为$\langle \operatorname{grad} f, Y \rangle = (\mathrm{d}f)(Y)$)，并且$|\operatorname{grad} f| = |\mathrm{d}f| = |\mathrm{D}f|$. §12 中我们将证明：对

任意函数 f，

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \Delta f.$$

推论 2 如果 f 是完备黎曼流形M上的一个函数，它的支集紧致，则

$$\int_M \Delta f \mathrm{d}v = 0.$$

(§12 中我们实际上另给一个办法证明这里的推论 2.)

下面我们要证明 Fubini **定理**的一个广义形式，它对几何中大多数的应用来说是足够的. 对几何中更深远的应用可参阅[F1]中定理 3.2.22 与 3.2.32.

定理 3 设 f: $M \to \boldsymbol{R}$ 是黎曼流形M上的可积函数，又 u: $M \to \boldsymbol{R}$ 是一个仅具离散临界点的 C^∞ 函数。令

$$S_\lambda = \{x \in M: \ u(x) = \lambda\}.$$

在 u 的离散临界点集之外 S_λ 是一个 C^∞ 超曲面，因此它有一个诱导的黎曼度量. 令 $\mathrm{d}v_\lambda$ 是 S_λ 在诱导度量下的标准测度，则

$$\int_M f \mathrm{d}\, v_M = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{S_\lambda} \frac{f}{|\mathrm{d}u|} \mathrm{d}v_\lambda.$$

证明 在 C_0^0 上定义两个线性泛函 $\mathscr{T}$，$\mathscr{T}_1$ 如下：对任意的 $f \in C_0^0$，令

$$\mathscr{T}(f) = \int_M f \,\mathrm{d}\, v_M,$$

$$\mathscr{T}_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{S_\lambda} \frac{f}{|\mathrm{d}u|} \,\mathrm{d}\, v_\lambda.$$

首先要说明定义 $\mathscr{T}_1$ 是合理的. 令 $\mathscr{C}$ 是 u 的临界值集合(由 Sard 定理可知它是零测度集)，于是只要看

$$\int_{S_\lambda} \frac{f}{|\mathrm{d}u|} \,\mathrm{d}\, v_\lambda$$

就可以了，其中 $\lambda \in \boldsymbol{R} - \mathscr{C}$. 由于 $f \in C_0^0$，可知

$$\lambda \longmapsto \int_{S_\lambda} \frac{f}{|du|} \, d\, v_\lambda$$

是连续的，从而 $\mathscr{T}_1$ 的定义是合理的。$\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{T}_1$ 是 C_0^0 上的 Daniell 积分，因此一旦在 C_0^0 上证明 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1$ 之后，由 $\mathscr{T}$、$\mathscr{T}_1$ 扩充到 $L^1(M)$ 上的唯一性即得定理 3 的证明。

为了证明在 C_0^0 上 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1$，我们可以忽略 u 的散离临界点集 $\mathscr{C}$. 利用一个 C^∞ 单位分解，欲证之事变为证明：对每个 $x \in M - \mathscr{C}$，存在一个 x 在 $M - \mathscr{C}$ 中的邻域 $\mathscr{U}$，使得对任意 $f \in C_0^0$，f 的支集在 $\mathscr{U}$ 中，则有

$$\int_{\mathscr{U}} f \, d\, v_M = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{S_\lambda \cap \mathscr{U}} \frac{f}{|du|} \, d\, v_\lambda \qquad (11.11)$$

在 $M - \mathscr{C}$ 上定义一个向量场

$$X = \frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|^2}.$$

令 $\{\varphi_t\}$ 是 X 的**积分流**，即如果 $y \in M$，那么 $t \longmapsto \varphi_t(y)$ 是 X 的一条积分曲线并且 $y = \varphi_0(y)$。易见当 $\varphi_t(y)$ 有意义时，有

$$\frac{du(\varphi_t(y))}{dt} = du(X(\varphi_t(y))) = du\left(\frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{|\operatorname{grad} u|^2} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle = 1.$$

从而如果 $y \in S_\mu$，则 $\varphi_t(y) \in S_{\mu+t}$。又对 S_μ 上任意切向量 Y，

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{|\operatorname{grad} u|^2} \langle \operatorname{grad} u, Y \rangle = \frac{1}{|\operatorname{grad} u|^2} Yu = 0,$$

所以 $X \perp S_\mu$，$\forall \mu \in \mathbf{R}$。对于任意 $x \in M$，可选一邻域 $A \subset S_\lambda$ 使得存在 $\varepsilon > 0$，ϕ: $A \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$: $(y, t) \longmapsto \varphi_t(y)$ 是有定义的并且 ϕ 是一个 C^∞ 嵌入。此时取

$$\mathscr{U} = \phi(A \times (-\varepsilon, \varepsilon)),$$

我们来证明 (11.11)。假设 $y^1, \cdots, y^{n-1}$ 是 A 中坐标函数，t 是

$(-\varepsilon, \varepsilon)$ 的自然坐标，相对于 $\mathscr{U}$ 中坐标函数 $\{t, y^1, \cdots, y^{n-1}\}$，$M$ 的黎曼度量表为

$$g = \langle X, X\rangle \mathrm{d}t\mathrm{d}t + \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{d}u|^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}t + \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j.$$

由于 $\sqrt{\det[h_{ij}]}\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{n-1}$ 是 S_λ 的面积元在 $A = S_\lambda\cap\mathscr{U}$ 上限制，于是可见

$$\int_{\mathscr{U}} f\,\mathrm{d}\,v_M = \int_{\mathscr{U}} f\cdot\sqrt{\det[h_{ij}]}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}u|}\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^{n-1}$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\mathrm{d}t\int_{S_t\cap\mathscr{U}} f\cdot\frac{\sqrt{\det[h_{ij}]}}{|\mathrm{d}u|}\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^{n-1}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{S_\lambda\cap\mathscr{U}}\frac{f}{|\mathrm{d}u|}\mathrm{d}\,v_\lambda.$$

最后一个等号是因为 f 的支集在 $\mathscr{U}$ 中所致。 这就证明了(11.11)。

定理 3 中要求 $\mathscr{U}$ 的临界点是离散的，初看起来似乎是个限制，但是由 Morse 理论中的一个基本定理可知，大多数 C^∞ 函数都有这个性质，即

设 $f: M\to \boldsymbol{R}$ 是一个 C^∞ 流形M上的 C^∞ 函数，那么任给M上一个正函数 δ，总存在一个 C^∞ 函数 f_0，使得它只具有离散的临界点并且在M上

$|f - f_0| < \delta$ （参阅 [GG] 第 63 页）。

下面的习题给出具有此性质的另一类函数。

习题 3. 试证一个 C^∞ 严格凸函数的临界点集总是离散的。

尽管如此，但在下面一个特殊情形中就不用对 u 加这种条件了。

定理 4 设 u 是黎曼流形上一个 C^∞ 函数，它的水平集是

$$S_\lambda \equiv \{x \in M:\ u(x) = \lambda\},$$

那么对于M上任意可积函数 f，有

$$\int_M f|du|dv_M = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{S_\lambda} f\, d\, v_\lambda, \tag{11.12}$$

其中 dv_λ 是 S_λ 上诱导度量的标准测度.

证明 我们也只须对 $f \in C_0^\infty$ 来证 (11.12)。令 $\tilde{\mathscr{C}}$ 是 u 的临界点集. 由于在 $\tilde{\mathscr{C}}$ 上 $|du| = 0$，故

$$\int_{\tilde{\mathscr{C}}} f|du|dv_M = 0.$$

因此我们又可忽略 $\tilde{\mathscr{C}}$ 了，定理 3 的证明便可逐字搬过来. 证毕.

很显然，当 $M = \boldsymbol{R}^n$，u 是一个坐标函数，那么定理 3 和 4 就是经典的 Fubini 定理.

最后我们来讨论黎曼流形中测地球的体积，这个黎曼流形的 Ricci 曲率$\geqslant(n-1)c^2$. 为方便计我们让 c 取正数或纯虚数，于是讨论的出发点便是 Ricci 曲率有下界，下界可正也可负. 我们先做些代数方面的准备.

设 f: $\tilde{V} \to V$ 是两个 n 维内积空间之间的线性变换，令 $\{\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n\}$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 分别是 $\tilde{V}$, V 的幺正基，它们的对偶基分别是 $\{\tilde{\omega}^1, \cdots, \tilde{\omega}^n\}$, $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$. 又令

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}^n, \quad \Omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

用下式定义 $a_0 \in \boldsymbol{R}$

$$f^*\Omega = a_0 \tilde{\Omega}.$$

用标准的记号可写 $a_0 = f^*\Omega/\tilde{\Omega}$. a_0 也可有别的描写法，设

$$f(\tilde{e}_i) = \sum_j a_i^j e_j,$$

若记 $\det f = \det[a_i^j]$，则

$$\frac{f^*\Omega}{\tilde{\Omega}} = \det f. \tag{11.13}$$

还可将 $|\det f|$ 写为另一种形式，便得下面的 (11.14)。设 $\{\tilde{A}_1, \cdots, \tilde{A}_n\}$ 是 $\tilde{V}$ 的一个基，则有

$$\left|\frac{f^*\Omega}{\tilde{\Omega}}\right| = \frac{|f(\tilde{A}_1)\wedge\cdots\wedge f(\tilde{A}_n)|}{|\tilde{A}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{A}_n|}. \tag{11.14}$$

在证明(11.14)之前，先回忆一下 n-向量的内积

$$|V_1\wedge\cdots\wedge V_n| \xlongequal{\text{定义}} \sqrt{\det[\langle V_i, V_j\rangle]}.$$

所以如果 $\{V_1, \cdots, V_n\}$ 是幺正的，那么 $|V_1\wedge\cdots\wedge V_n| = 1$。设

$$\tilde{A}_i = \sum_j \beta_i^j \tilde{e}_j, \quad i = 1, \cdots, n,$$

则

$$\begin{aligned} |f(\tilde{A}_1)\wedge\cdots\wedge f(\tilde{A}_n)| &= |\det[\beta_i^j]| \cdot |f(\tilde{e}_1)\wedge\cdots\wedge f(\tilde{e}_n)| \\ &= |\det[\beta_i^j]| \cdot |\det[\alpha_i^j]| \\ &\quad \cdot |e_1\wedge\cdots\wedge e_n| \\ &= |\det[\beta_i^j]| \cdot |\det f|. \end{aligned}$$

又

$$|\tilde{A}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{A}_n| = |\det[\beta_i^j]| \cdot |\tilde{e}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{e}_n| = |\det[\beta_i^j]|,$$

故(11.14)成立。

现在回到黎曼流形 M. 设 γ: $[0, b] \to M$ 是一条正规测地线，$\gamma(0) = x$。令 $\tilde{\Omega}$ 是欧氏空间 M_x 的一个体积元，又令 $\Omega(t)$ 是 M 在 $\gamma(t)$ 处的一个体积元，定义函数 φ: $[0, b] \to \boldsymbol{R}$ 为

$$\varphi(t) = \left|\frac{\exp_x^*\Omega(t)}{\tilde{\Omega}}\right|.$$

尽管 M_x, M 分别皆有两个体积元，但是 $\varphi(t)$ 却是一个确定的数，它和体积元 $\Omega(t)$, $\tilde{\Omega}$ 的不同选取无关。我们对 φ 感兴趣是由于计算体积的需要。令 $\Sigma(x)$ 是 M_x 中切割迹的内部，$\Sigma_x = \exp_x\Sigma(x)$. 由于 $\exp_x$: $\Sigma(x) \to \Sigma_x$ 是微分同胚(见 §10 引理 8)，并且 $\Sigma(x)$ 微分同胚于一个开球，故 Σ_x 也微分同胚于一个开球。所以尽管 M 也许不可定向但 Σ_x 总是可定向的。在 $\Sigma(x)$ 与 Σ_x 中选取定向使

$\exp_x$: $\Sigma(x) \to \Sigma_x$ 是保定的，从而

$$\frac{\exp_x^*\Omega}{\tilde{\Omega}} \geqslant 0,$$

其中 $\tilde{\Omega}$，Ω 分别是确定定向的 $\Sigma(x)$，Σ_x 的体积元。仿照上面 $\varphi(t)$ 的定义，我们定义 $\Sigma(x)$ 上的一个函数 φ：$\Sigma(x) \to \boldsymbol{R}$ 如下：对任意 $\tilde{y} \in \Sigma(x)$，令

$$\varphi(\tilde{y}) = \left|\frac{\exp_x^*\Omega(y)}{\tilde{\Omega}(\tilde{y})}\right| = \frac{\exp_x^*\Omega(y)}{\tilde{\Omega}(\tilde{y})},$$

其中 $y = \exp_x\tilde{y}$。现在来计算 Σ_x 的体积

$$V(\Sigma_x) = \int_{\Sigma_x} \Omega = \int_{\exp_x(\Sigma(x))} \Omega = \int_{\Sigma(x)} \exp_x^*\Omega$$
$$= \int_{\Sigma(x)} \varphi\tilde{\Omega} = \int_{\Sigma(x)} \varphi \, \mathrm{d}\, v_{M_x},$$

其中 $\mathrm{d}\, v_{M_x}$ 是 M_x 中标准的 Lebesque 测度，省写这个记号便有

$$V(M) = \int_{\Sigma(x)} \varphi. \tag{11.15}$$

更一般，若 $B(\alpha)$ 是 M 中以 x 为心半径为 α 的测地球，$\tilde{B}(\alpha)$ 是 M_x 中以原点为心半径为 α 的球，那么由同样的论证得

$$V(B(\alpha)) = \int_{\tilde{B}(\alpha)\cap\Sigma(x)} \varphi. \tag{11.16}$$

(11.15)，(11.16)中积分的计算主要归结于对 φ 的计算。沿着 Σ_x 中从 x 出发的径向测地线上 φ 的值就是前面的 $\varphi(t)$。用(11.14)来算 $\varphi(t)$，具体算起来要用 Jacobi 场，以后的计算中总假定 $\dim M = n$。

引理 5 设 γ：$[0,b] \to M$ 是一条正规测地线，其上没有共轭点。又设 $J_1, \cdots, J_{n-1}$ 是 $n-1$ 个沿着 γ 的线性无关的正常 Jacobi 场，它们的初值皆为零。记常数 $|\dot{J}_1(0) \wedge \cdots \wedge \dot{J}_{n-1}(0)|$ 为 $|\mathscr{T}|$（从 §7 引理 7 的证明中可看出 $|\mathscr{T}| \neq 0$），则

$$\varphi(t) = \frac{|J_1(t) \wedge \cdots \wedge J_{n-1}(t)|}{|\mathscr{T}|\, t^{n-1}}.$$

证明 对于每个 i，$J_i(t)$ 可看做是单参数测地线族 $\{\gamma_u\}$ 的横截向量场，其中 $\gamma_u(t)=\exp_x t(\dot\gamma(0)+u\dot J_i(0))$（见(5.4)）。考虑 M_x 中的单参数直线族 $\tilde\gamma_u(t)=t(\dot\gamma(0)+uA_i)$。$\{\tilde\gamma_u\}$ 的横截向量场在 $\tilde\gamma_0$ 上的限制是 tA_i。若令 $A_i=\dot J_i(0)$，那么

$$\gamma_u(t)=\exp_x\tilde\gamma_u(t).$$

从而 $d\exp_x$ 将 $\{\tilde\gamma_u\}$ 的横截向量场映为 $\{\gamma_u\}$ 的．即

$$d\exp_x(tA_i)=J_i(t).$$

由(11.14)得

$$\varphi(t)=\frac{|\dot\gamma(t)\wedge J_1(t)\wedge\cdots\wedge J_{n-1}(t)|}{t^{n-1}|\dot\gamma(0)\wedge\dot J_1(0)\wedge\cdots\wedge\dot J_{n-1}(0)|}.$$

由于 $\dot\gamma\perp J_i$，$\forall i$ 和 $|\dot\gamma|=1$，从上式立得结论．证毕．

现在我们需要引进一些定义及记号．当M是单连通，曲率为 c^2 的空间形式时，记它的 $\varphi(t)$ 为 $\varphi_c(t)$．记M中以 x 为心，t 为半径的测地球体积为 $V(x,t)$，相应地有 $V_c(x,t)$。一个函数 f 称为是下降的，如果对于 $t_1<t_2$，总有

$$f(t_1)\geqslant f(t_2).$$

定理 6 设M是一个黎曼流形，它的 Ricci 曲率$\geqslant(n-1)c^2$。又设 γ: $[0,b]\to M$ 是一条无割点的正规测地线，则

(1) (R. L. Bishop) $\dfrac{\varphi(t)}{\varphi_c(t)}$ 是下降函数；

(2) (R. L. Bishop-M. Gromov) 更设M是完备的，则对固定的 $x\in M$，$V(x,t)/V_c(t)$ 对 t 是下降函数．

(3) (R. L. Bishop) 如果 $c^2>0$，M 完备，则

$$V(M)\leqslant V\left(S^n\left(\frac{1}{c}\right)\right),$$

其中 $S^n(1/c)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中半径为 $1/c$ 的球面。此外当 $V(M)=V(S^n(1/c))$ 时，M等距同构于 $S^n(1/c)$。

注记。 为了理解(2)，首先验证

$$\lim_{t\to 0}\frac{V(x,t)}{V_c(t)}=1 \qquad \text{（这作为习题）},$$

因此(2)可导出

$$V(x,t)\leqslant V_c(t),\quad \forall t.$$

但是(2)还包含更多的信息（大家将在下面的定理 8 中看到）. Gromov 是第一个认识到“下降”两字的全部含义的.

定理 6 的证明需要一个非常有用的引理，即引理 7. 关于这个引理的应用，见 [C3] 和 [BGM] 中第 134 至 138 页.

引理 7 设 $\gamma:[0,b]\to M$ 是一条正规测地线，其上无 $\gamma(0)$ 的割点，令 ρ 是到 $\gamma(0)$ 的距离函数，那么在 $\gamma((0,b])$ 上，有

$$\frac{\varphi'}{\varphi}=\left(\Delta\rho-\frac{n-1}{\rho}\right)\cdot\gamma.$$

证明 上述断言是逐点的，故我们只须在 $\gamma(b)=y$ 处证明该式即可。不妨取初值为零的正常 Jacobi 场 $J_1,\cdots,J_{n-1}$，使得

$$\langle J_i(b),J_j(b)\rangle=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n-1.$$

由 §8 引理 5 及 $D^2\rho(\dot\gamma,\dot\gamma)=0$ 得

$$\Delta\rho(\gamma(b))=\sum_{i=1}^{n-1}D^2\rho(J_i(b),J_i(b))=\sum_{i=1}^{n-1}\langle\dot J_i(b),J_i(b)\rangle.$$

又

$$\frac{d\varphi^2}{dt}=\frac{2}{|\mathscr{T}|^2t^{2n-2}}\sum_{i=1}^{n-1}\langle J_1\wedge\cdots\wedge\dot J_i\wedge\cdots\wedge J_{n-1},J_1\wedge\cdots\wedge J_{n-1}\rangle$$
$$-2(n-1)\frac{|J_1\wedge\cdots\wedge J_{n-1}|^2}{|\mathscr{T}|^2t^{2n-1}},$$

因为 $\langle J_i(b),J_j(b)\rangle=\delta_{ij}$，故

$$\frac{d\varphi^2}{dt}(b)=\frac{2}{|\mathscr{T}|^2\cdot b^{2n-2}}\sum_{i=1}^{n-1}\langle\dot J_i(b),J_i(b)\rangle$$
$$-\frac{2(n-1)}{|\mathscr{T}|^2\cdot b^{2n-1}},$$

$$\varphi(b)=\frac{1}{|\mathscr{T}|\cdot b^{n-1}}.$$

从而

$$\frac{\varphi'(b)}{\varphi(b)}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi^2}{2\varphi^2}(b)=\sum_{i=1}^{n-1}\langle \dot{J}_i(b),\ J_i(b)\rangle-\frac{n-1}{b}$$

$$=\left(\Delta\rho-\frac{n-1}{\rho}\right)(\gamma(b))$$

证毕。

定理 6 的证明 记 M^c 是单连通常曲率为 c^2 的空间（其中 c 或为正数，或为纯虚数，或为零），设

$$\gamma:\ [0,\ b]\to M^c$$

是一条正规测地线，易见 γ 无割点 $\Longleftrightarrow b\leqslant \pi/c$（当 $c=0$ 或纯虚数时，令 $\pi/c=\infty$）。由定理的条件知 γ: $[0,\ b]\to M$ 无割点，也就无共轭点，从而由 Bonnet-Myers 定理知 $b\leqslant\pi/c$。这表明 γ 与 γ 皆无割点，从而可用 §8 的 Laplace 算子比较定理，得 $\Delta\rho\leqslant\Delta\rho_c$。再由引理 7 得

$$\frac{\varphi'}{\varphi}\leqslant\frac{\varphi_c'}{\varphi_c}.$$

上式两端取积分 ($t_1<t_2$) 得

$$\log\frac{\varphi(t_2)}{\varphi(t_1)}\leqslant\log\frac{\varphi_c(t_2)}{\varphi_c(t_1)}.$$

于是

$$\frac{\varphi(t_1)}{\varphi_c(t_1)}\geqslant\frac{\varphi(t_2)}{\varphi_c(t_2)}.$$

这便证明了(1)。

为了证明(2)，我们需下列事实。设 f, g 是$[0,\ \infty)$上正函数且 $f(t)/g(t)$ 是下降的，则由

$$t \longmapsto \frac{\int_0^t f}{\int_0^t g}$$

确定的函数也是下降的．这可从下列计算看出．令 $h = f/g$，如果 $t_1 < t_2$，

$$\int_0^{t_1} f \cdot \int_{t_1}^{t_2} g = \int_0^{t_1} gh \cdot \int_{t_1}^{t_2} g \geqslant \left(\int_0^{t_1} g\right) \cdot h(t_1) \cdot \int_{t_1}^{t_2} g$$
$$\geqslant \int_0^{t_1} g \cdot \int_{t_1}^{t_2} gh = \int_0^{t_1} g \cdot \int_{t_1}^{t_2} f,$$

故

$$\int_0^{t_1} f \cdot \int_0^{t_2} g = \int_0^{t_1} f \cdot \int_{t_1}^{t_2} g + \int_0^{t_1} f \cdot \int_0^{t_1} g$$
$$\geqslant \int_0^{t_1} g \cdot \int_{t_1}^{t_2} f + \int_0^{t_1} g \cdot \int_0^{t_1} f$$
$$= \int_0^{t_1} g \cdot \int_0^{t_2} f.$$

现在转回来证明（2）．固定 $x \in M$，$\Sigma(x)$ 是 M_x 中切割迹的内部，我们已定义一个函数 φ：$\Sigma(x) \to \boldsymbol{R}$．对于 M^c，固定 $x_0 \in M^c$，有类似的 $\Sigma_c(x_0)$，φ_c：$\Sigma_c(x_0) \to \boldsymbol{R}$． 如果 X，X_c 分别是 $M_x, M^c_{x_0}$ 中单位向量，那么本定理的(1)导致在 $tX \in \Sigma(x)$，$tX_c \in \Sigma_c(x_0)$ 时，函数

$$t \longmapsto \frac{\varphi(tX)}{\varphi_c(tX_c)}$$

是下降的．现在来修改 φ，φ_c． 令 χ：$M_x \to \boldsymbol{R}$ 是集合 $\Sigma(x)$ 的特征函数，即

$$\chi(X) = \begin{cases} 1, & \text{当 } X \in \Sigma(x), \\ 0, & \text{当 } X \in \Sigma(x). \end{cases}$$

类似地有 χ_c：$M^c_{x_0} \to \boldsymbol{R}$． 令 $\tilde{\varphi} \equiv \chi \cdot \varphi$，$\tilde{\varphi}_c \equiv \chi_c \cdot \varphi_c$，我们就得到两个函数

$$\tilde{\varphi}: M_x \to \boldsymbol{R}, \quad \tilde{\varphi}_c: M^c_{x_0} \to \boldsymbol{R}.$$

由 Bonnet-Myers 定理知 $\chi \leqslant \chi_c$（当按等距同构等同 M_x 与 $M^c_{x_0}$ 之后）。这样一来对 $t \geqslant 0$，函数

$$t \longmapsto \frac{\chi(tX)}{\chi_c(tX)}$$

是下降的，从而函数

$$t \longmapsto \frac{\varphi(tX)}{\bar{\varphi}_c(tX_c)}$$

是下降的，其中 X，X_c 分别是 M_x，$M^c_{x_0}$ 中任意单位向量。若令 $\mathscr{S}(r)$，$\mathscr{S}_c(r)$ 分别是 M_x，$M^c_{x_0}$ 中半径为 r 的球面，那么从刚证过的事实可得，函数

$$r \longmapsto \frac{\displaystyle\int_{\mathscr{S}(r)} \bar{\varphi}}{\displaystyle\int_{\mathscr{S}_c(r)} \bar{\varphi}_c}$$

对 r 是下降的。现令

$$f(r) = \int_{\mathscr{S}(r)} \bar{\varphi}, \qquad g(r) = \int_{\mathscr{S}_c(r)} \bar{\varphi}_c.$$

由 Fubini 定理知M中以 x 为心，t 为半径的测地球体积是

$$V(x, t) = \int_0^t \mathrm{d}r \int_{\mathscr{S}(r)} \bar{\varphi} = \int_0^t f.$$

类似地

$$V_c(t) = \int_0^t g.$$

于是定理中的(2)便证明了.

因为 $c^2 > 0$，所以 $M^c = S^n\left(\frac{1}{c}\right)$. 由定理的(2)有

$$\frac{V(M)}{V(M^c)} = \frac{V\left(x, \dfrac{\pi}{c}\right)}{V_c\left(\dfrac{\pi}{c}\right)} \leqslant \lim_{t \to 0} \frac{V(x, t)}{V_c(t)} = 1,$$

故(3)的前半部分便证明了．剩下要证：从

$$V(M)=V\left(S^n\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

可推出M与$S^n\left(\frac{1}{c}\right)$等距同构．不难看出当

$$V(M)=V\left(S^n\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

时，证明(1)，(2)过程中出现的所有不等式皆变成等式，特别地也就有

$$\Delta\rho_c\left(\bar{\gamma}\left(\frac{\pi}{c}\right)\right)=\Delta\rho\left(\gamma\left(\frac{\pi}{c}\right)\right).$$

由 Laplace 算子的比较定理可知，对M中任意正规测地线

$$\gamma:\left[0,\ \frac{\pi}{c}\right]\to M,$$

$M_{\gamma(t)}$中包含$\dot{\gamma}(t)$的平面的截面曲率皆是c^2．由于γ可以随意选取，故M是常曲率空间，其曲率为c^2．它的万有覆盖空间也是常曲率c^2的空间，从而由 §5 定理 10，它等距同构于$S^n\left(\frac{1}{c}\right)$．如果这个覆盖是$k$重的，则

$$V(M)=\frac{1}{k}V\left(S^n\left(\frac{1}{c}\right)\right).$$

由此得$k=1$，定理 6 便证完了．

习题 4. 如果$\tilde{M}$，M是黎曼流形，π：$\tilde{M}\to M$是局部等距同构，又是k重覆盖映射，试证$V(\tilde{M})=kV(M)$．

最后我们来证明下列最大直径定理，它补足了 Bonnet-Myers 定理(回忆第 138 页和 161 页中的讨论)．

定理 8（最大直径定理） 设M是一个n维紧致黎曼流形，它的 Ricci 曲率$\geqslant(n-1)c^2>0$，直径是π/c，则M等距同构于

$S^n\left(\frac{1}{c}\right)$, 其中 $S^n\left(\frac{1}{c}\right)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中半径为 $1/c$ 的球面.

这个定理的一个特别情形,即在截面曲率 $\geqslant c^2$ 这样强得多的假设下,在 1959 年首先为 Toponogov 证明了. 1975 年郑绍远证明这个定理 8,用到他自己的关于 Laplace 算子第一特征值的比较定理(参阅 [C3]). 后来 K. Shiohama 发表了一个证明,仅用定理 6 的 (2)(参阅 [S4]). 这个证明自然比郑的原始证明初等多了. 而后我们注意到一桩旧事,追溯到 1965 年, M. Berger 就已经在一个通得过的注记中提到: 定理 8 是对的, 并且可用定理 6 的(3)来证明(见 [B2], 特别看第 268 页). 考虑到这个定理的证明是如此初等,我们就已不怀疑, Berger 之所以没有公布证明细节,那是因为他觉得不必要了.

定理 8 的证明 用乘以正常数改变黎曼度量的尺度的办法使定理 8 等价于这样的事实: 如果 Ricci 曲率 $\geqslant n-1$, $d(M)=\pi$, 则M等距同构于 $S^n(1)$.

取 $p, q\in M$, 使得 $d(p,q)=d(M)=\pi$. 令 $B_p(r)$, $B_q(r)$ 分别是M中以 p、q 为中心、r 为半径的开测地球. 由于 $d(p,q)=\pi$,所以

$$B_p(r)\cap B_q(\pi-r)=\varnothing,\quad \forall r\in[0,\pi].$$

因此若令

$$V(p,r)\equiv V(B_p(r)),\quad V(q,\pi-r)\equiv V(B_q(\pi-r)),$$

则有

$$V(p,r)+V(q,\pi-r)\leqslant V(M),\quad \forall r\in[0,\pi]. \qquad (甲)$$

又由于 $d(M)=\pi$,所以

$$V(p,\pi)=V(q,\pi)=V(M). \qquad (乙)$$

令 $V_1(r)$ 是 $S^n(1)$ 中半径为 r 的测地球体积,于是由定理 6(2) 和上面的(甲),(乙)就有

$$
\begin{aligned}
V(M) &\geqslant V(p,r) + V(q,\pi - r) \\
&= \frac{V(p,r)}{V_1(r)} V_1(r) + \frac{V(q,\pi - r)}{V_1(\pi - r)} V_1(\pi - r) \\
&\geqslant \frac{V(p,\pi)}{V_1(\pi)} V_1(r) + \frac{V(q,\pi)}{V_1(\pi)} V_1(\pi - r) \\
&= \frac{V(M)}{V_1(\pi)} V_1(r) + \frac{V(M)}{V_1(\pi)} V_1(\pi - r) \\
&= V(M).
\end{aligned}
$$

易知上面式子中的不等号必皆是等号，从而有

$$\frac{V(p,\pi)}{V_1(\pi)} = \frac{V(p,r)}{V_1(r)}, \quad \forall r \in (0,\pi].$$

由于

$$\lim_{r\to 0} \frac{V(p,r)}{V_1(r)} = 1 \quad (\text{见定理 6 的注记}),$$

即得

$$V(M) = V(p,\pi) = V_1(\pi) = V(S^n(1)).$$

再由定理 6(3) 即得 M 与 $S^n(1)$ 等距同构.

关于定理 6 的一些拉杂的话也应该讲点。 首先定理 6(1) 可以推出 Bonnet-Myers 定理。事实上从

$$\varphi_c\left(\frac{\pi}{c}\right) = 0$$

推知存在 $t_0 \leqslant \pi/c$，使得 $\varphi(t_0) = 0$。从而 $d\exp_x$ 在 $t_0\dot{\gamma}(0) \in M_x$ 处退化，这就表明 $\gamma(t_0)$ 是共轭点，所以当 γ 是最短时必须有 $L(\gamma) \leqslant \pi/c$，于是 $d(M) \leqslant \pi/c$。第二点是：如果假定以截面曲率 $\leqslant c^2$ 来代替 $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)c^2$，那么相似于定理 6 的结论也成立，只是把结论中的"下降"换成"上升"，"$\leqslant$"换成"$\geqslant$"(参阅第152页的推论 8)，留此作为习题。最后我们指出，定理 6(2) 在割点以内的情形在 1963 年已为 Bishop 知道了，但是正是因这样一位

Gromov，他做了一个简单的观察(在割点之外也成立)之后，接着阐明体积比的下降性质的真正含义，局面大为改观，可谓"化腐朽为神奇"。(参阅 [G7]，[G8]，[CGT].)一个稍稍不同方向上的工作，但是也表明那个作为几何不变量的体积函数的重要性，可参阅 [GW4]。

§12 某些基本的计算技巧和 Weitzenböck 公式

本节参考文献

[W9].

[R2]，第五章.

如果我们要去证实黎曼流形上某个张量等式或张量不等式，只要在一点附近选取一个适当的坐标系或一个适当的标架场，并验证等式或不等式在这点成立就行了. 本节讨论在最通常的情形下如何进行这种选取.

在 §4 中(见 (4.10))，我们已证明了**以点 $x\in M$ 为中心的法坐标**的存在性. 它们是满足

$$\begin{cases} x^i(x)=0, & \forall i, \\ g_{ij}(x)=\delta_{ij}, & \forall i,j, \\ \mathrm{d}g_{ij}(x)=0 \end{cases} \tag{12.1}$$

的坐标系 $\{x^i\}$，这里 $\sum\limits_{i,j} g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 是度量张量. 在 §4 中已给出了 (12.1)的一个应用，这里我们再给出一些应用.

(1) 设 X 是一个向量场. 利用 X 可定义一个(1，1)型的张量场，记为 A_X，它对每一个向量场 Y，有

$$A_X(Y)=-D_YX.$$

这里的负号是一种方便的约定. A_X 可看成是在每点 $x\in M$ 处的 M_x 的一个自同态，即

$$v\longmapsto -\mathrm{D}_vX,\quad \forall v\in M_x.$$

现在我们来证明

$$\operatorname{div} X = -\operatorname{tr} A_X, \tag{12.2}$$

这里 tr 表示在每点处自同态的迹. 为此，只需在 $x \in M$ 处验证它. 设 $\{x^i\}$ 是以 x 为中心的任何坐标系;又设

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

如 Ω 是坐标系 $\{x^i\}$ 下的一个局部度量体积元,则

$$\Omega = \sqrt{G}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

其中 $\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$ 是度量张量, $G = \det[g_{ij}]$. 由

$$\operatorname{div} X = di(X)\Omega/\Omega$$

(记号的定义见 §11 的(11.10))可得出

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{G} X^i). \tag{12.3}$$

现特取 $\{x^i\}$ 是以 x 为中心的法坐标系,则

$$\operatorname{div} X \overset{\text{在}x\text{处}}{=\!=\!=} \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$$

$$-\operatorname{tr} A_X \overset{\text{在}x\text{处}}{=\!=\!=} \sum_i \left\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i},$$

因而证得 (12.2).

(2) 如 f 是一个 C^∞ 函数，现在我们来证明在 §11 的推论 2 前面所写出的公式

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f. \tag{12.4}$$

采用在 x 邻近处的任何坐标系 $\{x^i\}$, $\sum g_{ij} dx^i dx^j$ 为度量，设 g^{ij} 被定义为

$$\sum_j g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k,$$

则

$$\operatorname{grad} f = \sum_i \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{12.5}$$

再特取 $\{x^i\}$ 为在 x 处的法坐标系，则由(12.3)及(12.5)可得到

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{\sqrt{G} \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right\} \\ &\overset{\text{在 } x \text{ 处}}{=\!=\!=} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}, \end{aligned} \tag{12.6}$$

而

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} D^2 f \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \overset{\text{在 } x \text{ 处}}{=\!=\!=} \sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2},$$

所以证得了(12.4)．顺带地，(12.4)和(12.6)在一起就给出了 §2 中习题 5 的一个解．

在法坐标系 $\{x^i\}$ 的中心 x 处还存在着下列关系：

$$\begin{cases} dg^{ij}(x) = 0, & \forall i, j, \\ dG(x) = 0. \end{cases}$$

由逆阵作为原来矩阵的余因子的详尽表示式就可得出其中第一组式子，而第二式得自(12.1)及行列式的定义．

(3) 如 $\{V_i\}$ 为向量场的任何局部基，$\{\omega^i\}$ 为其对偶 1-形式基(即 $\omega^i(V_j) = \delta^i_j$)，则有

$$d = \sum_i \omega^i \wedge D_{V_i}. \tag{12.7}$$

由此立即可推出：所有平行的微分形式(即满足 $D\eta = 0$ 的 η)一定是闭的．

为了证明(12.7)，可先考察其右端(记为 $\bar{d}$)与局部基 $\{V_i\}$ 的选取无关，换言之，如 $\{Y_i\}$ 是向量场的另一组基，且 $\{\psi^i\}$ 是对偶于 $\{Y_i\}$ 的 1-形式基，则

$$\sum_i \omega^i \wedge D_{V_i} = \sum_j \psi^j \wedge D_{Y_j}.$$

这只是线性代数的一个练习。于是 $\bar{\mathrm{d}}$ 是一个整体地作用在M上的算子。我们现选取在 x 处的法坐标系 $\{x^i\}$，故有

$$\bar{\mathrm{d}}=\sum_i \mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}.$$

另一方面，利用在 x 处法坐标 $\{x^i\}$ 的性质可推出

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)&=\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left\{\mathrm{d}x^j\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right\}\\&\quad-\mathrm{d}x^j\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\\&=-\mathrm{d}x^j\left(\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\xlongequal{\text{在 }x\text{ 处}}0,\quad \forall i,j,k.\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mathrm{d}x^j\xlongequal{\text{在 }x\text{ 处}}0,\quad \forall i,j.\tag{12.8}$$

现在要验证(12.7)式，即对在点 $x\in M$ 处的每一个微分式 η，有

$$\bar{\mathrm{d}}\eta=\mathrm{d}\eta.$$

利用 d，$\bar{\mathrm{d}}$ 的线性性质，可不妨设

$$\eta=f\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^q,$$

所以从(12.8)得到

$$\bar{\mathrm{d}}\eta\xlongequal{\text{在 }x\text{ 处}}\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^q=\mathrm{d}\eta.$$

这就证得(12.7)。

有时利用标架场(即向量场的局部基 $\{E_i\}$，使得 $\langle E_i, E_j\rangle=\delta_{ij}$，$\forall i,j$)要比用坐标向量场计算起来更方便。在 $x\in M$ 邻近的标架场 $\{E_i\}$ 称为**在 x 点是法标架场**，当且仅当 $(\mathrm{D}_{E_i}E_j)(x)=0$，$\forall i,j$。给定 $x\in M$ 及在 M_x 处的一个幺正基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，我们总可以作出在 x 处的一个法标架场 $\{E_i\}$，使得对每一个 i 都满足 $E_i(x)=e_i$。事实上，设 $\{x^i\}$ 为以 x 为中心的任何坐标系（即

$x^i(x)=0$, $\forall i$), 对邻近于 x 的任何点 p, 令 $E_i(p)$ 为沿连接 x 到 p 的（关于坐标系 $\{x^i\}$ 的）径向曲线把 e_i 从 x 平移到 p 所得的向量. 显然由 §1 的(1.12)可知, 有 $D_{e_j}E_i=0$, $\forall i, j$. 这样做出的标架场 $\{E_i\}$ 即为所求.

习题 1. 设 $\{E_i\}$ 为在一邻域中定义的一个标架场,

(1) $\forall C^\infty$ 函数 f, $\operatorname{grad} f=\sum\limits_i (E_i f)E_i$;

(2) $\forall$ 向量场 X, $\operatorname{div}X=\sum\limits_i \langle D_{E_i}X, E_i\rangle$;

(3) 利用(1)及(2)给出: "$\forall C^\infty$函数 f, 有 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\Delta f$" 的第二种证明.

我们将用标架场的观点去讨论作用在微分式上的 Hodge-Laplace **算子** Δ, 且顺带对 Hodge **定理**作一些评论.

设M是一个 n 维定向流形, $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 为一局部标架场, 且 $\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$为其对偶标架场 ($\omega^i(E_j)=\delta_{ij}$), 且 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 定义了M的定向. 设 $\mathscr{A}^p(M)$ 为M上 C^∞的 p-形式(或称 p 次微分式)向量空间, 我们可利用

$$*(\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p})=\pm\omega^{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_n},$$

(其中 $(i_1, \cdots, i_n)$ 为 $(1, \cdots, n)$ 的一个置换, 上述等式在偶置换时取+, 奇置换时取−), 并用线性性质把这个定义扩充到整个 $\mathscr{A}^p(M)$ 上, 从而定义出一个线性映射

$$*: \mathscr{A}^p(M)\to\mathscr{A}^{n-p}(M), \quad \forall p=0, \cdots, n.$$

可以验证这个定义是与 $\{\omega^i\}$ 的选取无关, 且 $\forall C^\infty$ 函数 f, $\forall\eta\in\mathscr{A}^p(M)$ 有

$$*(f\eta)=f(*\eta).$$

另外知道

$$**: \mathscr{A}^p(M)\to\mathscr{A}^p(M)$$

满足

$$**=(-1)^{pn+p}.$$

于是 $*$ 是一个同构．此外有 $*1=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$.

现利用 $\delta=(-1)^{pn+n+1}*\mathrm{d}*$ 定义

$$\delta:\mathscr{A}^p(M)\to\mathscr{A}^{p-1}(M).$$

可以验证，δ 确实把 $\mathscr{A}^p$ 映到 $\mathscr{A}^{p-1}$，复杂的符号 $(-1)^{pn+n+1}$ 是为了保证下面的(12.9)式成立．

设 $\alpha\in\mathscr{A}^p$，$\beta\in\mathscr{A}^p$，而且 α，β 中有一个具有紧致支集，则定义一个 L^2-内积

$$\langle\!\langle\alpha,\ \beta\rangle\!\rangle\equiv\int_M\alpha\wedge*\beta\left(=\int_M\langle\alpha,\beta\rangle\mathrm{d}v\right),$$

于是 d，δ 彼此成形式共轭，即如 $\alpha\in\mathscr{A}^p$，$\gamma\in\mathscr{A}^{p-1}$，且 α，γ 中有一个具有紧致支集，则有

$$\langle\!\langle\alpha,\ \mathrm{d}\gamma\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\delta\alpha,\ \gamma\rangle\!\rangle.\tag{12.9}$$

为了证明这个性质，我们注意到《，》是一个定义在 $\mathscr{A}^p(M)$ $(\forall p=0,\cdots,n)$ 上的内积，(在 $\mathscr{A}^0(M)=C^\infty$ 函数全体上，它是通常的 L^2 内积)，而且容易验证 $*$ 是保持此内积的，即

$$\langle\!\langle*\alpha,\ *\beta\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\alpha,\ \beta\rangle\!\rangle,\quad\forall\alpha,\ \beta\in\mathscr{A}^p(M).$$

于是证明(12.9)成立就等价于证明

$$\langle\!\langle*\alpha,\ *\mathrm{d}\gamma\rangle\!\rangle=\langle\!\langle*\delta\alpha,\ *\gamma\rangle\!\rangle,$$

或等价于

$$\int_M(*\alpha\wedge\mathrm{d}\gamma)+(-1)^{n-p}((\mathrm{d}*\alpha)\wedge\gamma)=0.$$

由于上式中的被积项等于 $(-1)^{n-p}\mathrm{d}(*\alpha\wedge\gamma)$，由 Stokes 定理即可知上式成立．

定义 Hodge-Laplace **算子** Δ：$\mathscr{A}^p(M)\to\mathscr{A}^p(M)(\forall p=0,\cdots,n)$ 为

$$\Delta=\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta.\tag{12.10}$$

因为 $\mathrm{d}^2=0$，$\delta^2=0$，则 $\Delta=(\mathrm{d}+\delta)^2$．如果微分式 η 适合 $\Delta\eta=0$，则称 η **是调和的**．在紧致的 M 上，η 为调和的充要条件是

$$\mathrm{d}\eta=\delta\eta=0.$$

充分性是显然的，其必要性得自

$$\Delta\eta = 0 \Rightarrow \langle\!\langle \Delta\eta, \eta\rangle\!\rangle = 0 \Rightarrow \langle\!\langle \mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\eta\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \delta\eta, \delta\eta\rangle\!\rangle = 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}\eta = 0,\ \delta\eta = 0.$$

在最后一步中，利用了事实：$\langle\!\langle \alpha, \alpha\rangle\!\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0$。如$M$不紧致，则调和微分式就不一定是闭的.

习题 2. 在 R^2 上找出调和函数及不是闭的调和一次微分式.

提示： 首先验证在 R^n 上有

$$\Delta(f\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p) = -\sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^p.$$

现在我们利用在一点处法标架场的存在性来证明：如$\{E_i\}$是一个局部标架场，则

$$\delta = -\sum_i i(E_i)\mathrm{D}_{E_i}. \tag{12.11}$$

设 δ 为上式右边的算子，利用线性代数可验证：δ 是与标架场 $\{E_i\}$ 的选取无关，所以 δ 是整体地定义在M上的. 为证明(12.11)，只需证明它在 $x\in M$ 处成立就行了。设 $\{E_i\}$ 是一个在 x 处的法标架场，$\{\omega^i\}$ 是它的**对偶标架场** $(\omega^i(E_j) = \delta^i_j)$，由于

$$\mathrm{D}_{E_i}E_j = \sum_k \Gamma^k_{ij}E_k,$$

所以有

$$(\mathrm{D}_{E_i}\omega^j)(E_k) = \mathrm{D}_{E_i}(\omega^j(E_k)) - \omega^j(\mathrm{D}_{E_i}E_k) = -\omega^j(\mathrm{D}_{E_i}E_k),$$

即

$$\mathrm{D}_{E_i}\omega^j = -\sum_k \Gamma^j_{ik}\omega^k, \tag{12.12}$$

于是得到

$$(\mathrm{D}_{E_i}\omega^j)(x) = 0. \tag{12.13}$$

令 $\eta = f\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^p$，其中 $\{\omega^i\}$ 满足(12.13)，则

$$\delta\eta \xlongequal{\text{在}x\text{处}} -\sum_i (-1)^{i+1}(E_i f)\omega^1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}^i\wedge\cdots\wedge\omega^n.$$

为计算 $\delta\eta$，注意到对 $j=1,\cdots,p$，有

$$*\omega^j\wedge\omega^{p+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n$$
$$=(-1)^{(p-1)(n-p+1)+(p-j)}\omega^1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}^j\wedge\cdots\wedge\omega^p,$$

所以

$$\delta\eta=(-1)^{pn+n+1}*\mathrm{d}(f\omega^{p+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n)$$

$$\overset{\text{在}x\text{处}}{=\!=}(-)^{pn+n+1}*\sum_{j=1}^{p}(E_jf)\omega^j\wedge\omega^{p+1}\wedge\cdots\wedge\omega^n(\text{由}(12.7))$$

$$=\sum_j(-1)^j(E_jf)\omega^1\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}^j\wedge\cdots\wedge\omega^p$$

$$=\bar{\delta}\eta,$$

这就证明了(12.11)。

作为应用，我们可以证明，对 C^∞ 函数 f 的 Hodge-Laplace 算子 Δ 满足

$$\Delta f=\delta\mathrm{d}f=-\mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2f. \tag{12.14}$$

因为 $\delta f=0$，所以第一个等式是显然的。第二式等式得自 (12.7) 及 (12.11)，这是因为关于在 x 处的法标架场，它们在 x 处都等于 $-\sum\limits_i E_iE_if$。现在从(12.14)可引出两点评论：

(1) 对函数的 Hodge-Laplace 算子是以前定义的 Laplace 算子 $\mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2$ 的**负值**。两种符号约定是根深蒂固的，各自有着不同的理由。称 $\mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2f$ 为 Δf 的理由是在 $\boldsymbol{R}^n$ 上，这是一个由 Laplace 所导入的算子 $\sum\limits_i\dfrac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$，所以这个命名具有历史的合理性。另一方面，以(12.10)作为 Hodge-Laplace 算子的定义是为了保证 $\Delta:\mathscr{A}^p(M)\to\mathscr{A}^p(M)$ 成为一个正算子，即 $\forall\eta\in\mathscr{A}^p(M)$，有

$$\langle\!\langle\Delta\eta,\ \eta\rangle\!\rangle\geqslant 0.$$

解决这个困境的唯一方法是每当我们在讨论一个函数的 Laplace

算子时，我们必须特别指出这个 Laplace 算子的意思. 在本书中，我们总是把 $\operatorname{tr} D^2$ 作为对函数的 Laplace 算子.

(2) 第二个评论是我们能提供另一种方法证明：在流形 M 上，每个具有紧致支集的函数适合

$$\int_M \Delta f dv = 0. \tag{12.15}$$

(第一种证法见 §11 的推论 2.)事实上，先设 M 为可定向. 如 Ω 为度量体积元，由 Stokes 定理就可得出

$$\int_M \Delta f dv = -\int_M \delta df\ \Omega = -\int_M *(\delta d f)$$

$$= -\int_M d(*df) = 0.$$

当 M 不可定向时，令 π: $\widetilde{M} \to M$ 为定向覆盖，则

$$\int_{\widetilde{M}} \widetilde{\Delta}(\pi^* f) = 0.$$

但 π 是局部等距的，故 $\widetilde{\Delta}\pi^* f = \pi^*(\Delta f)$，所以

$$0 = \int_{\widetilde{M}} \pi^*(\Delta f) = 2\int_M \Delta f.$$

于是证得(12.15).

算子 δ 是向量场散度的一种推广. 为了看清楚这一点，可定义 1-形式 η 的**对偶向量场** $\tilde{\eta}$ 为

$$\langle \tilde{\eta}, Y \rangle = \eta(Y), \quad \forall \text{ 向量场 } Y,$$

于是对每一个 1-形式 η，有

$$\delta\eta = -\operatorname{div} \tilde{\eta}. \tag{12.16}$$

事实上对在 x 处的一个法标架场 $\{E_i\}$，设 $\{\omega^i\}$ 为其对偶标架场，并记 $\eta = \sum_i \eta_i \omega^i$，则 $\tilde{\eta} = \sum_i \eta_i E_i$，所以(12.16)的两边在 x 处都等于 $-\sum_i (E_i \eta_i)$.

另一个关于 Hodge-Laplace 算子的公式是所谓 Weitzenböck

公式的一系列式子中的一个．为避免混淆起见，我们用 Δ_0 表示作用在 C^∞ 函数上的 $\operatorname{Tr} D^2$，于是对每一个 C^∞ 的 1-形式 η 有

$$\frac{1}{2}\Delta_0|\eta|^2=|D\eta|^2-\langle\Delta\eta,\eta\rangle+\operatorname{Ric}(\tilde{\eta},\tilde{\eta}). \qquad (12.17)$$

我们只需在一固定点 $x\in M$ 处证明(12.17)成立．设 $\{E_i\}$ 为 x 邻近处的一个法标架场，使得对于 $\{E_i(x)\}$ 来说，M_x 上的对称双线性形式 Ric 呈对角形．设 $\{\omega^i\}$ 是对偶于 $\{E_i\}$ 的标架场．记

$$\eta=\sum_i \eta_i\omega^i,$$

则

$$\operatorname{Ric}(\tilde{\eta},\tilde{\eta})\xlongequal{\text{在}x\text{处}}\sum_i \eta_i^2\operatorname{Ric}(E_i,E_i).$$

由定义知，$|D\eta|^2=\sum_i|D_{E_i}\eta|^2$，所以

$$\frac{1}{2}\Delta_0|\eta|^2\xlongequal{\text{在}x\text{处}}\sum_i\langle D_{E_i}D_{E_i}\eta,\eta\rangle+|D\eta|^2.$$

对任何张量场 T，定义 $\operatorname{tr} D^2T$ 为

$$\operatorname{tr} D^2T\equiv\sum_i\{D_{E_i}D_{E_i}T-D_{D_{E_i}E_i}T\},\quad \forall\text{么正标架场}\{E_i\}$$

(见 §2 中 tr 的定义及 Ricci 恒等式)．这个定义显然与 $\{E_i\}$ 的选取无关．于是我们可以写出

$$\frac{1}{2}\Delta_0|\eta|^2=\langle\operatorname{tr} D^2\eta,\eta\rangle+|D\eta|^2.$$

利用(12.7)，(12.10)及前面已证得的事实：

$$i(E_j)D_{E_k}\xlongequal{\text{在}x\text{处}}D_{E_k}i(E_j),\quad\forall j,k,$$

人们可以验证：对任何微分式，有

$$\Delta\xlongequal{\text{在}x\text{处}}-\sum_i D_{E_i}D_{E_i}+\sum_{i,j}\omega^i\wedge i(E_j)R_{E_iE_j},$$

此处 R 是曲率张量． 最后的和式与 $\{E_i\}$ 的选取无关，它是整体地定义在 M 上的，因而我们得到：对所有 C^∞ 微分式，有

$$\Delta = -\operatorname{tr} D^2 + \sum_{i,j} \omega^j \wedge i(E_i) R_{E_i E_j}. \qquad (12.18)$$

综上所述，我们就得到了 (12.17)．

公式(12.18)是原始的 Weitzenböck **公式**．(12.18)或(12.17)的意义在于从这些公式中可以看出流形的曲率能影响任何形如 $P = \Delta + Q$（其中 $\deg Q \leqslant 1$）的偏微分算子的解．对于 (12.17) 的许多应用，我们可参看本节一开始所列出的论文．我们在这里只指出一点，即由下列的 Hodge 定理，调和形式空间的研究将显得极其重要．

Hodge **定理** 在紧致定向的黎曼流形 M 上，调和 p-形式的向量空间 $\mathscr{H}^p$ 是同构于 p 阶上同调向量空间 $H^p(M, \boldsymbol{R})$．

目前能用极简单的方法来证明这个定理（见[W10]，第四章）．但是阅读在本节一开始所列出的 de Rham 的书中的证明是有益的，因为那个证明本身提供了巨大的信息． 我们现在能给出 (12.17)的一个应用．

定理 如 M 是一个紧致黎曼流形，其 Ricci 曲率是**拟正的**（即处处非负，但在一点处为正），则 $\mathscr{H}^1 = \{0\}$．

证明 我们首先假设 M 是定向的． 只需证明任何调和 1-形式 η 必为零．因为 M 紧致，$\Delta\eta = 0$，所以由 (12.4) 及 (12.16) 推出

$$0 = \int_M |D\eta|^2 dv + \int_M \operatorname{Ric}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) dv.$$

Ric 是拟正的假设意味着第二个积分为非负，所以这两个积分都等于零，于是有

$$D\eta = 0,$$

$$\operatorname{Ric}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = 0.$$

第一个方程表明 η 是平行的,现在对每一个向量场 X,有

$$X|\eta|^2 = 2\langle D_X\eta, \eta\rangle = 0,$$

于是 $|\eta| = \text{const}$. 如果 η 在某处非零,则 η 处处非零,由 Ric 的拟正性知 $\mathrm{Ric}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) > 0$,于是产生矛盾,因而 η 恒为零.

如 M 不可定向,设 $\pi: \hat{M} \to M$ 为两重定向覆盖(见 §6 定理 7′ 前的定义),于是 π 为局部等长一事意味着 π^* 把 M 上的调和微分式映到在 $\hat{M}$ 上的调和微分式. 又因为 π^* 是单的(π 是满的),所以 M 上除了零之外没有调和微分式. 证毕.

因为一阶同调群 $H_1(M, \boldsymbol{R})$ 同构于 $H^1(M, \boldsymbol{R})$,于是由 Hodge 定理知道,由紧致性及 Ricci 曲率的拟正性可推出

$$H_1(M, \boldsymbol{R}) = 0.$$

所以由 $H_1(M, \boldsymbol{R}) = 0$ 可推出 $H_1(M, \boldsymbol{Z})$是一个有限群. 再利用 Poincaré 定理知道

$$H_1(M, \boldsymbol{Z}) \cong \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)].$$

(这里[,]表示换位子群),所以 $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ 是有限的. 但是由 §7 推论 9 后列出的 Cheeger-Gromoll 定理知道,从紧致性及 Ricci 曲率的拟正性可以推出 π_1 是有限的(于是 $H_1(M, \boldsymbol{Z})$是有限的,因为 $H_1(M, \boldsymbol{R}) = 0$). 因此在这情形下,利用调和微分式的方法并没有得到最强的结论,但是上述证法在复流形中有广泛而深远的推广,因而它具有巨大的价值(见本节一开始所列出的论文).

对于 (12.17) 的另一个应用,见 [BGM] 中的第 179—185 页.

§13 子流形和第二基本形式

本节参考文献

[S8, IV], 第七章 §c.

[GKM], §3.7.

[KN, II], 第七章 §1 至 §7.

为了谈论在一个包容空间中某子流形的"形状"，我们先做个形象的考察. 大家都知道，$\boldsymbol{R}^3$ 中的平面 $\boldsymbol{R}^2$ 与圆柱

$$C = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3:\ x^2 + z^2 = 1, y \in \boldsymbol{R}\}$$

是局部等距的. 事实上映射

$$\phi:\ \boldsymbol{R}^2 \to C:\ (x, y, 0) \longmapsto (\sin x,\ y,\ \cos x)$$

就是一个局部等距，同时也是覆盖映照. 但是 $\boldsymbol{R}^2$ 与 C 看起来甚至在局部上也显然是不同的(见图 13.1). 描写它们在外观上的区别有一个办法，那就是观察它们各自的法向量的状态. $\boldsymbol{R}^2$ 的单位法向量场是 N_1，把 N_1 看成 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^3$ 的 C^∞ 映射时，它是常值映射，对 $\boldsymbol{R}^2$ 的任意切向量 v 总有 $D_v N_1 = 0$. 而在另一情形，C 的单位法向量场 N_2 只在 y 方向上是常值的，在与圆周 $\{y = y_0, x^2 + z^2 = 1\}$ 相切的方向上不再是常值的了. 实际上当把 N_2 看成 N_2: $C \to \boldsymbol{R}^3$ 之后，在 C 上有

$$\begin{cases} D_Y N_2 = 0, & \text{如果 } Y \text{ 沿着 } y \text{ 方向}, \\ D_X N_2 = X, & \text{如果 } X \text{ 切于上述圆周}. \end{cases} \tag{13.1}$$

我们可做进一步比较. 当然 C 不与单位球面 S^2 等距同构，因此它们在外观上肯定是不同的，但也有相似之处. S^2 上单位法向量场 N_3 显然满足:

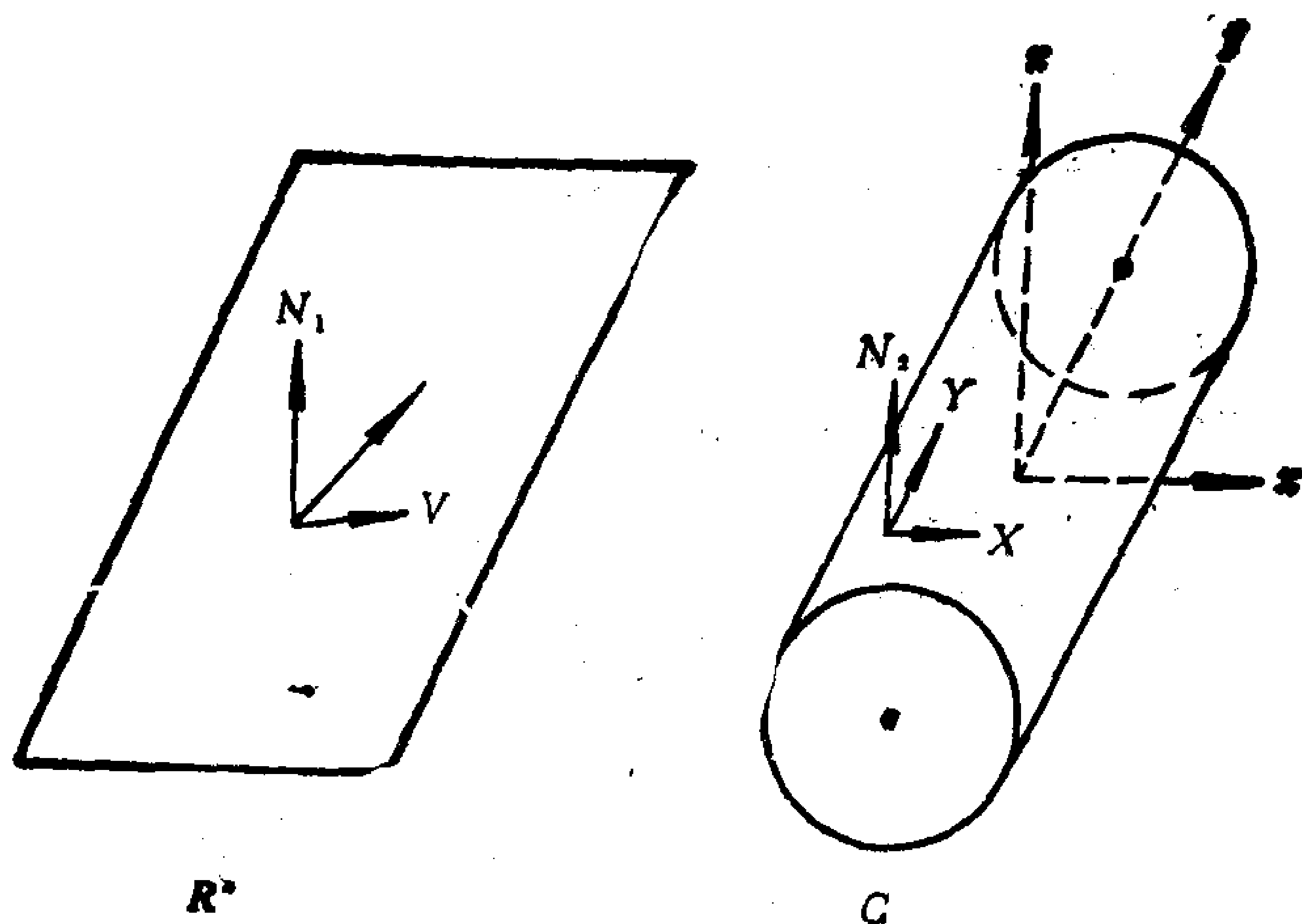


图 13.1

$$D_W N_3 = W,$$

其中W是S^2的任一切向量（见图 13.2）. 可见C在一个方向上((13.1) 中的X)与S^2相似,在另一方向上((13.1)中的Y)与S^2不同.

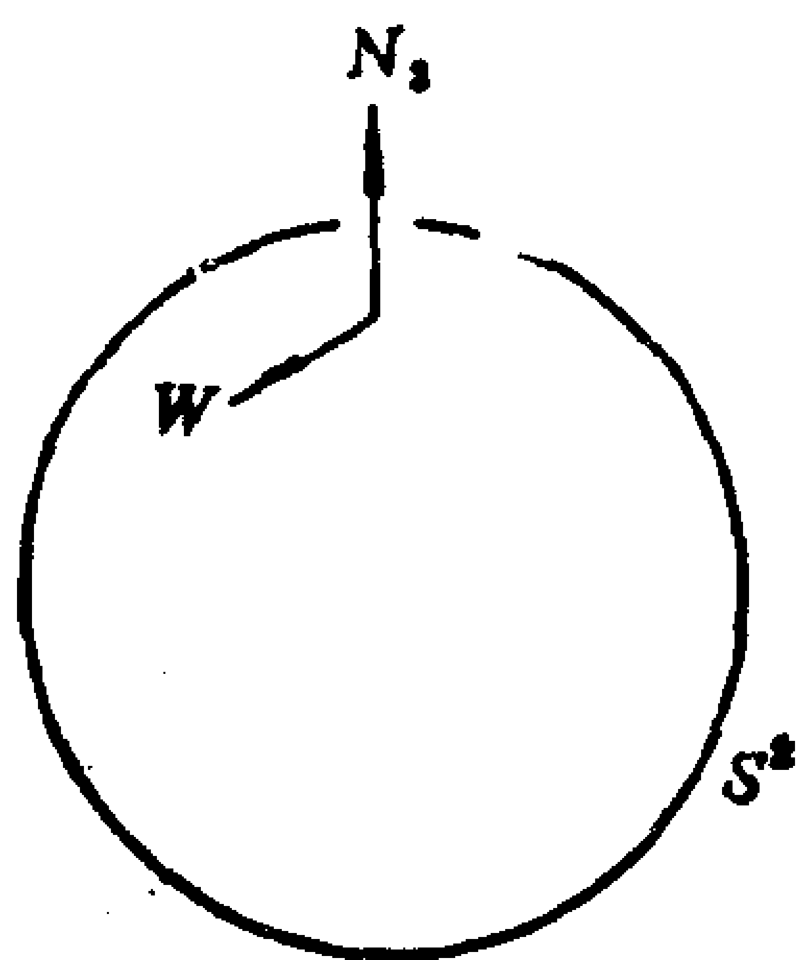


图 13.2

看清这些例子后，显见，为了充分描写 R^3 中曲面的外观，我们应当考察$D_X N$,其中N是曲面的单位法向量场,X是曲面的任意切向量. 注意: $D_X N$是切于曲面的,即$D_X N \perp N$! 这是因为

$$\langle D_X N, N\rangle = \frac{1}{2} X\langle N, N\rangle$$

$$= \frac{1}{2} X \cdot 1 = 0.$$

因为一个向量由它与所有别的向量的内积值完全决定，所以考察 D_XN 就相当于考察 $\langle D_XN, Y\rangle$，其中 X，Y 是曲面的切向量. 这里的D是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的方向导数，它恰是平坦度量的 Levi-Civita 联络. 上述关于 $\boldsymbol{R}^3$ 中曲面的这些观察提出了描写黎曼流形中子流形外观的一个一般方法.

设 $\widetilde{M}$ 是一个 $\tilde{n}$ 维黎曼流形，M 是 $\widetilde{M}$ 的一个 n 维子流形，$n<\tilde{n}$. 为免去语言上的含混，我们定义

$\mathscr{N}(M)=\widetilde{M}$ 中所有M上的向量场，它们处处垂直于 M；

$\mathscr{T}(M)=\widetilde{M}$ 中所有M上的向量场，它们处处切于 M.

$\mathscr{N}(M)$中的元素称为M的**法向量场**. 对给定的 $\nu\in\mathscr{N}(M)$，M的对应于 ν 的**第二基本形式**是一个函数 II_ν，它满足

$$\mathrm{II}_\nu(X, Y)=\langle\tilde{D}_X\nu, Y\rangle, \quad \forall X, Y\in\mathscr{T}(M), \tag{13.2}$$

其中 $\tilde{D}$ 是 $\widetilde{M}$ 的 Levi-Civita 联络.

引理 1 对于每个固定的 ν，II_ν 是M上一个二次对称协变张量场.

证明 对于任意 $X, Y\in\mathscr{T}(M)$，

$$0=X\langle\nu, Y\rangle=\langle\tilde{D}_X\nu, Y\rangle+\langle\nu, \tilde{D}_XY\rangle,$$

所以有

$$\mathrm{II}_\nu(X, Y)=-\langle\nu, \tilde{D}_XY\rangle \tag{13.3}$$

（这称为 Weingarten 方程）. 但是

$$\langle\nu, \tilde{D}_XY\rangle=\langle\nu, \tilde{D}_YX\rangle+\langle\nu, [X, Y]\rangle=\langle\nu, \tilde{D}_YX\rangle,$$

因此再用(13.3)得

$$\mathrm{II}_\nu(X, Y)=\mathrm{II}_\nu(Y, X).$$

此外，对于M上 C^∞ 函数 f，由(13.2)得

$$\mathrm{II}_\nu(fX, Y)=f\mathrm{II}_\nu(X, Y)=\mathrm{II}_\nu(X, fY),$$

所以 II_ν 是M上张量场. 证毕.

由引理 1 可知，固定 ν 与 $x\in M$ 时，对任意的 $X, Y\in\mathscr{T}(M)$，$\mathrm{II}_\nu(X, Y)(x)$ 仅依赖于 $X(x)$，$Y(x)$. 此外由于(13.3)，在 x 点

的 II_ν 仅依赖于 $\nu(x)$ 并且在M的 C^∞ 函数环上 II_ν 对于 ν 是线性的. 于是对任意的 $x\in M$,我们有**多线性函数**

$$M_x^\perp\otimes M_x\otimes M_x\to \boldsymbol{R}:(N,v,w)\longmapsto \mathrm{II}_\nu(V,W)(x),$$

其中 $M_x^\perp$是 M_x 在 $\widetilde{M}_x$ 中的垂直补; ν 是M的法向量场满足 $\nu(x)=N$; V,W是M的切向量场,满足

$$V(x)=v,\quad W(x)=w.$$

由于 $\widetilde{M}_x(=M_x\oplus M_x^\perp)$ 是一个内积空间,故有不少的等价说法来描述这个多线性映射. 其中之一是定义一个**对称双线性型**(或称**二次型**)

$$S:\ M_x\otimes M_x\to M_x^\perp,$$

使得

$$\langle S(v,w),\nu\rangle\equiv \mathrm{II}_\nu(v,w),\quad \forall \nu\in\mathscr{N}(M).$$

S 的迹 $\sum\limits_{i=1}^{n}S(e_i,e_i)$ 是 $M_x^\perp$ 中一个元素,记做 $\eta(x)$,其中 $\{e_1,\cdots,e_n\}$是M_x 中的幺正基.这个 η 是M的法向量场,称为M的**平均曲率法向量场**, $|\eta|$ 称为M的**平均曲率**. η 的几何意义在 §14 中就能看明白了. 另一个办法是对任意 $\nu\in\mathscr{N}(M)$ 确定一个对称线性变换

$$A_\nu:\ M_x\to M_x,\quad \forall x\in M,$$

使得

$$\langle A_\nu(v),w\rangle\equiv \mathrm{II}_\nu(v,w),\quad \forall v,w\in M_x.$$

这里的 A_ν 也称为是对应于 ν 的**第二基本形式**. 显然 $\eta(x)$ 是 $M_x^\perp$ 中对偶于线性函数

$$M_x^\perp\to\boldsymbol{R}:\ \nu\longmapsto \mathrm{tr}A_\nu$$

的唯一元素. 对偶的含义是指

$$\langle\eta(x),\nu\rangle=\mathrm{tr}A_\nu.\tag{13.4}$$

对于 $M_x^\perp$ 中的幺正基 $\{\nu_1,\cdots,\nu_{\bar{n}-n}\}$ 有

$$S(v,w)=\sum_i \mathrm{II}_{\nu_i}(v,w)\nu_i,\quad \forall v,w\in M_x.\tag{13.5}$$

当然上面所有这些处理皆是纯代数的，我们下面的任务是与几何打交道．

例 1 设M是 $\tilde{M}$ 的**超曲面**（即 $\tilde{n}=n+1$），在局部固定一个单位法向量场 ν，并记 II_ν 为 II，A_ν 为 A，于是有

$$\begin{cases}\mathrm{II}:\ M_x\otimes M_x\to \boldsymbol{R}, & \mathrm{II}(X,Y)=\langle\tilde{\mathrm{D}}_X\nu,\ Y\rangle,\\ A:\ M_x\to M_x, & A(X)=\tilde{\mathrm{D}}_X\nu.\end{cases}\tag{13.6}$$

由于 ν 是单位法向量场，故

$$\langle A(X),\nu\rangle=\langle\tilde{\mathrm{D}}_X\nu,\ \nu\rangle=\frac{1}{2}X\langle\nu,\nu\rangle=0,$$

从而

$$A(X)\in\mathscr{T}(M),\quad \forall X\in\mathscr{T}(M),$$

所以(13.6)的写法是合适的．A 的特征值称为**主曲率**，例如说是 $p_1,\cdots,p_n$（请自己证明这些 p_i 皆是实的）．$\det A$ 称为M 的 Gauss-Kronecker **曲率**或简称为**高斯曲率**．

例 2 考虑一张曲面 $M\subset\boldsymbol{R}^3$，那么高斯曲率 $\det A$ 就是主曲率的乘积．我们知道有一个高斯的 Egregium（**绝好的）定理**，它说这里定义的 Gauss-Kronecker 曲率(高斯曲率)就是 §2 中定义的曲面M的截面曲率（大家复习一下大学教材即可知此事．或者将此事看做后面的命题 5 的特殊情形）．下面讲点这个例子中 Gauss-Kronecker 曲率的几何意义．现在假设M是可定向的，那么存在一个定义在整个M上的单位法向量场(见下面的习题)，记为 ν．这就使我们能定义一个 C^∞ 映射 $\Gamma:\ M\to S^2:\ x\longmapsto\nu(x)$，称为**高斯映射**．于是下列式子就差不多是同语反复了

$$\mathrm{d}\Gamma(X)=A(X),\ \forall X\in M_x,\ x\in M.$$

令 Ω_0，Ω 分别表示 S^2，M 的体积元，由(11.13)有

$$\frac{\Gamma^*\Omega_0}{\Omega}=\det\mathrm{d}\Gamma=\text{高斯曲率}.\tag{13.7}$$

(13.7)表明高斯曲率就是 $\Gamma^*\Omega_0/\Omega$，而后者的几何意义是清楚的．

此时若假定M有正的高斯曲率，那么高斯映射Γ就是一个浸入. 令g_0是S^2上的标准黎曼度量，则可给M以新的黎曼度量Γ^*g_0. 当M是紧致时，Γ^*g_0是完备的，Γ是局部等距，从而是覆盖映射（§5 引理 9）. 由于S^2是单连通的，故Γ是微分同胚，因此有

引理 2 设M是R^3中紧致曲面，具有正的高斯曲率，那么高斯映射Γ: $M \to S^2$是微分同胚.

这个引理有一个有趣的推论. R^3中一个曲面称为是**凸的**，如果它总落在它的切平面的一侧（见下面的习题 2）. 如果M适合引理 2 的假设，那么M必是凸的. 假若不然，则如图 13.3 所示，存在$x \in M$，使得M与M_x^+, M_x^-皆相交，其中M_x^+, M_x^-是由M_x分隔的两个半开空间，且使得$\nu(x) \in M_x^+$. 令y, z分别是$M \cap M_x^+$, $M \cap M_x^-$中距M_x最远的点，那么M_y, M_z必皆平行于M_x，即$\nu(x)$, $\nu(y)$, $\nu(z)$彼此平行，从而$\{\nu(x), \nu(y), \nu(z)\}$至少是$S^2$中两个点，这就与$\Gamma$是微分同胚矛盾，于是便有

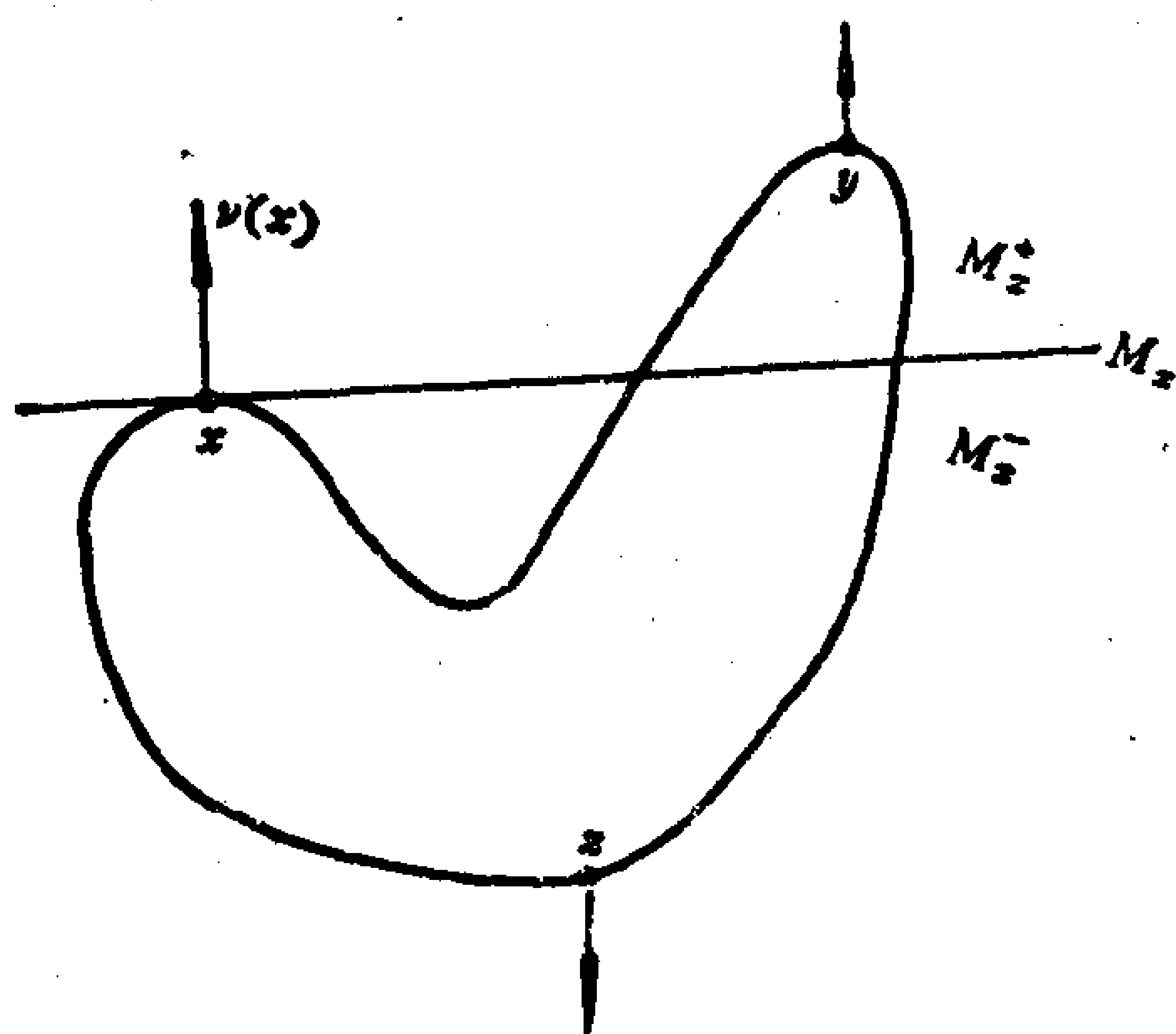


图 13.3

推论 3 R^3中紧致正曲率曲面必是凸曲面.

引理 2 与推论 3 可以显然推广到R^n中超曲面的情形. 欲知此方向的深远结果请看 [S1].

习题 1. 设M是某定向流形$\tilde{M}$中的一个定向超曲面；试证M上存在一个整体定义的单位法向量场.

习题 2. 现在假定 Jordan-Brouwer **分隔定理**，即R^n中紧致超曲面必将R^n分成两个开集，它们有公共的边界并且恰是这个超曲面. 试证R^3中一个

紧致凸曲面必是一个凸开集的边界(凸集的定义见第 111 页).

习题 3. 设M是 R^{n+1} 中的超曲面，并且在原点O处存在一个 R^n 的邻域$\mathscr{U}$，使得M是某个函数 $f: \mathscr{U}\to R$ 的图象，即

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathscr{U}\times R\subset R^{n+1}:\ x \in \mathscr{U}\},$$

此外还假定 $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ (即M在O点切于 $R^n\subset R^{n+1}$). 令

$$\nu = \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\ (0),$$

试证

$$D^2f(0) = -\mathrm{II}_\nu.$$

现在我们从不同的角度来看第二基本形式. 对每个 $x\in M$，定义两个正交投影:

$$\top:\ \widetilde{M}_x \to M_x,\quad \perp:\ \widetilde{M}_x\to M_x^\perp.$$

令D是M上诱导度量的 Levi-Civita 联络，按惯例验证得

$$D_XY = \top(\widetilde{D}_X Y),\quad \forall X, Y\in \mathscr{T}(M) \qquad (13.8)$$

(见 §1, 习题 5). 现在我们问，$\perp(\widetilde{D}_XY)$是什么呢?

引理 4 沿用上面的记号有 $S(X, Y) = -\perp(\widetilde{D}_XY)$，换句话说，

$$S(X, Y) = D_XY - \widetilde{D}_XY,\quad \forall X, Y\in \mathscr{T}(M). \qquad (13.9)$$

证明 对于任意 $Z\in \mathscr{T}(M)$，验证(13.9)的两端与 Z 的内积相等;对于任意 $\nu\in \mathscr{N}(M)$，也做同样的验证.证毕.

这个引理告诉我们，第二基本形式恰是两个 Levi-Civita 联络 D, $\widetilde{D}$ 之差. 这便澄清了 §4 中引进的**全测地子流形**的概念. §4 引理 2 说:M是全测地的当且仅当它的第二基本形式恒为零(现在你大概想再读那个引理的证明吧).于是第二基本形式可看作是定量刻划与全测地的差异. §4 引理 3 说: 如果M是全测地的，则$K(P) = \widetilde{K}(P)$，其中P是任意一个M的切平面，K, $\widetilde{K}$ 分别是 M, $\widetilde{M}$ 的**截面曲率函数**. 一般情形，我们可以期望

$$\widetilde{K} = K + (\text{第二基本形式的函数}),$$

确切叙述如下:

命题 5(高斯方程) 对于 $X, Y \in \mathscr{T}(M)$，有

$$\langle \tilde{R}_{XY}X, Y\rangle = \langle R_{XY}X, Y\rangle - \langle S(X, X), S(Y, Y)\rangle + |S(X, Y)|^2,$$

其中 $\tilde{R}$, R 分别是 $\tilde{M}$, M 的曲率张量.

注记. 有一个办法来理解高斯方程. 对于 $X, Y \in \mathscr{T}(M)$，我们已经确定 $\tilde{\mathrm{D}}_XY$ 的两个分量 $\perp(\tilde{\mathrm{D}}_XY)$, $\top(\tilde{\mathrm{D}}_XY)$. 因此自然地要确定最简单的二阶对象 $\tilde{R}_{XY}Z$ 的$\perp$与$\top$分量，其中 $Z \in \mathscr{T}(M)$. 高斯方程是确定 $\langle \top\tilde{R}_{XY}X, Y\rangle$ 的，实际上高斯方程的证明方法可以给出：对于任意的 $X, Y, Z, W \in \mathscr{T}(M)$，

$$\begin{aligned}\langle \tilde{R}_{XY}Z, W\rangle = \langle R_{XY}Z, W\rangle - \langle S(X, Z), S(Y, W)\rangle \\ + \langle S(Y, Z), S(X, W)\rangle,\end{aligned} \tag{13.10}$$

这就确定了 $\top\tilde{R}_{XY}Z$. (13.10) 中当 $Z = X$, $W = Y$ 时就是命题 5，这个特别情形是最重要的. 关于另一个分量 $\perp\tilde{R}_{XY}Z$ 的计算将引出另一组子流形的基本方程式，称为 Codazzi **方程**(见后面的命题 13).

命题 5 的证明 证明只是一个直接的计算，具体如下：

$$\langle \tilde{R}_{XY}X, Y\rangle = -\langle \tilde{\mathrm{D}}_X\tilde{\mathrm{D}}_YX, Y\rangle + \langle \tilde{\mathrm{D}}_Y\tilde{\mathrm{D}}_XX, Y\rangle + \langle \tilde{\mathrm{D}}_{[X,Y]}X, Y\rangle,$$

$$\begin{aligned}-\langle \tilde{\mathrm{D}}_X\tilde{\mathrm{D}}_YX, Y\rangle &= -\langle \tilde{\mathrm{D}}_X(\mathrm{D}_YX - S(X, Y)), Y\rangle \\ &= -\langle \tilde{\mathrm{D}}_X\mathrm{D}_YX, Y\rangle + \langle \tilde{\mathrm{D}}_XS(X, Y), Y\rangle \\ &= -\langle \mathrm{D}_X\mathrm{D}_YX, Y\rangle + \langle S(X, \mathrm{D}_YX), Y\rangle \\ &\quad + X\langle S(X, Y), Y\rangle - \langle S(X, Y), \tilde{\mathrm{D}}_XY\rangle,\end{aligned}$$

注意到 $S(X, \mathrm{D}_YX), S(X, Y) \in \mathscr{N}(M)$，故

$$\begin{aligned}\text{上式} &= -\langle \mathrm{D}_X\mathrm{D}_YX, Y\rangle - \langle S(X, Y), \tilde{\mathrm{D}}_XY\rangle \\ &= -\langle \mathrm{D}_X\mathrm{D}_YX, Y\rangle - \langle S(X, Y), \mathrm{D}_XY - S(X, Y)\rangle \\ &= -\langle \mathrm{D}_X\mathrm{D}_YX, Y\rangle + \langle S(X, Y), S(X, Y)\rangle.\end{aligned}$$

类似地有

$$\langle \tilde{\mathrm{D}}_Y\tilde{\mathrm{D}}_XX, Y\rangle = \langle \mathrm{D}_Y\mathrm{D}_XX, Y\rangle - \langle S(X, X), S(Y, Y)\rangle.$$

又

$$\langle \tilde{\mathrm{D}}_{[X,Y]}X, Y\rangle = \langle \mathrm{D}_{[X,Y]}X, Y\rangle - \langle S([X, Y], X), Y\rangle$$

$$= \langle D_{[X,Y]}X,\ Y\rangle,$$

从而

$$\langle \widetilde{R}_{XY}X,\ Y\rangle = -\langle D_X D_Y X,\ Y\rangle + \langle D_Y D_X X,\ Y\rangle + \langle D_{[X,Y]}X,\ Y\rangle + \langle S(X,\ Y), S(X,\ Y)\rangle - \langle S(X,\ X),\ S(Y,\ Y)\rangle.$$

于是命题得证.

这个命题有一系列重要的应用.

推论 6 (Egregium **定理**) 设M是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的曲面,则M的截面曲率等于M的 Gauss-Kronecker 曲率.

证明 设$\{e_1,\ e_2\}$是M的局部幺正标架场,于是从定义可知:

$$M\text{的截面曲率} = \langle R_{e_1e_2}e_1,\ e_2\rangle,$$

$$M\text{的 Gauss-Kronecker 曲率} = \det A$$

$$= \langle S(e_1,\ e_1),\ S(e_2,\ e_2)\rangle - |S(e_1,\ e_2)|^2,$$

又 $\boldsymbol{R}^3$ 是平坦的, 即 $\langle \widetilde{R}_{e_1e_2}e_1,\ e_2\rangle = 0$, 从而推论 6 是命题 5 的特例.

推论 7 设M是 $\widetilde{M}$ 中的超曲面, $\dim \widetilde{M}=\tilde{n}=n+1$; 设$A$是关于一个单位法向量场的第二基本形式. 如果$P$是$M$在$x$处的一张切平面,令 $A|_P$: $P\to P$ 是映射 A: $P\to M_x$ 之后再做向P的正交投影,于是有

$$\widetilde{K}(P) = K(P) - \det(A|_P),$$

其中 $\widetilde{K}$, K 分别表示 $\widetilde{M}$, M中的截面曲率.

证明 由于对任意 $X\in \mathscr{T}(M)$, 有

$$S(X,\ X) = \langle A(X),\ X\rangle \nu,$$

因此如果$\{e_1,\ e_2\}$是P的幺正基,则有

$$|S(e_1,\ e_2)|^2 - \langle S(e_1,\ e_1),\ S(e_2, e_2)\rangle = \langle A(e_1),\ e_2\rangle^2 - \langle A(e_1),\ e_1\rangle\langle A(e_2),\ e_2\rangle = -\det(A|_P).$$

从而由命题 5 可推出推论 7,证毕.

推论 8 设$\{\nu_1,\ \cdots,\ \nu_{\tilde{n}-n}\}$是 $M_x^\perp$ 的幺正基, 那么对于任意

$X, Y \in M_x$，有

$$\langle \tilde{R}_{XY}X, Y\rangle = \langle R_{XY}X, Y\rangle + \sum_i \mathrm{II}_{\nu_i}(X, Y)^2$$

$$- \sum_i \mathrm{II}_{\nu_i}(X, X)\mathrm{II}_{\nu_i}(Y, Y).$$

推论 9(Synge 引理) 设M包含一条$\tilde{M}$的测地线γ，那么对于任意平面P，它切于M并且包含$\dot{\gamma}$，就有

$$K(P) \leqslant \tilde{K}(P).$$

证明 设P由$\dot{\gamma}(t)$与Y张成的平面，令$X = \dot{\gamma}(t)$代入命题5。因为γ是全测地的，故$S(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$，从而推论9得证。

推论 10 R^3中直纹面(单参数直线族)有非正的高斯曲率。

推论 11 设M是$\tilde{M}$中曲面，即$\dim M = 2$，又设M包含一条$\tilde{M}$的测地线γ，那么

$$K(M_{\gamma(t)}) = \tilde{K}(M_{\gamma(t)}), \quad \forall t$$

成立当且仅当$M_{\gamma(t)}$在$\tilde{M}$中沿着γ平行。

证明 我们可以假定γ是正规测地线。设$X(t)$是M中单位向量场并处处垂直于γ，于是由$S(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$及命题5得

$$\tilde{K}(M_{\gamma(t)}) = K(M_{\gamma(t)}) + |S(\dot{\gamma}(t), X(t))|^2.$$

这样一来，我们可写出下列推演：

$$K(M_{\gamma(t)}) = \tilde{K}(M_{\gamma(t)}), \quad \forall t$$

$$\Longleftrightarrow S(\dot{\gamma}(t), X(t)) = 0, \quad \forall t$$

$$\Longleftrightarrow \tilde{D}_{\dot{\gamma}(t)}X - D_{\dot{\gamma}(t)}X = 0, \quad \forall t.$$

由于$\dot{\gamma}$在M中平行，$X \perp \dot{\gamma}$，所以X在M中也是平行的，从而

$$\tilde{D}_{\dot{\gamma}(t)}X - D_{\dot{\gamma}(t)}X = 0, \quad \forall t$$

$$\Longleftrightarrow \tilde{D}_{\dot{\gamma}(t)}X = 0, \quad \forall t$$

$$\Longleftrightarrow \tilde{D}_{\dot{\gamma}(t)}X = 0, \tilde{D}_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0, \quad \forall t$$

$\Longleftrightarrow$ 由$\{X(t), \dot{\gamma}(t)\}$张成的$M_{\gamma(t)}$在$\tilde{M}$中沿$\gamma$平行。

推论 12 设M是黎曼流形，$x \in M$。令$\{x^i\}$是围绕x的法坐

标．又设 P 是由 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}(0), \frac{\partial}{\partial x^2}(0)\right\}$ 张成的平面，$\mathscr{S}$ 是曲面

$$\{x^3 = \cdots = x^n = 0\},$$

那么 P 的截面曲率等于具有诱导度量的 $\mathscr{S}$ 在 O 点的高斯曲率．

证明 由于 $\{x^i\}$ 在 O 点的正则性(即 $x^i(0)=0$)以及(12.1)，可知 $\mathscr{S}$ 在 O 点的第二基本形式为零．再由命题 5 即可推出欲证的结果．

注记． 正如第 41 页说过的，这里的推论 12 事实上就是黎曼当年对切于 M 的平面的截面曲率的定义．

现在我们着手做 Codazzi 方程(或称 Codazzi-Mainardi 方程)，它是计算 $\perp\tilde{R}_{XY}Z(X, Y, Z\in\mathscr{T}(M))$ 的结果．这只是形式上来解释 Codazzi 方程． 同样要谈到的是：这些方程之重要性在于它们是某**过定方程组**的最后一批可积条件，这里的过定方程组是由下列问题提出的：当给定第二基本形式后，一个黎曼流形能否等距嵌入到某个高一维的流形．更确切的讨论见定理 15．

命题 13 (Codazzi 方程) 如果 $X, Y, Z\in\mathscr{T}(M)$，R 与 $\tilde{R}$ 分别是 M，$\tilde{M}$ 的曲率张量，那么

$$\begin{aligned}\perp\tilde{R}_{XY}Z = \{\perp\tilde{D}_Y S(X, Z) - S(D_Y X, Z) - S(X, D_Y Z)\}\\ - \{\perp\tilde{D}_X S(Y, Z) - S(D_X Y, Z)\\ - S(Y, D_X Z)\}.\end{aligned}$$

它的证明与命题 5 的相似，完全是计算．就凭它的长相，Codazzi 方程太复杂了以致不能大量应用．R^{n+1} 中超曲面的那个原始的 Codazzi 方程却是干净多了，现叙述如下：

命题 14 假设 $\tilde{M}$ 是常曲率空间，M 是 $\tilde{M}$ 中的超曲面，那么 $(D_X\mathrm{II})(Y, Z)$ 对变量 X, Y, Z 是对称的，其中 $X, Y, Z\in\mathscr{T}(M)$．

证明 因为 $\mathrm{II}(Y, Z)$ 对于 Y，Z 是对称的，故只须证明

$$(D_Y\mathrm{II})(X, Z) = (D_X\mathrm{II})(Y, Z).$$

取定 M 上一个单位法向量场 ν，由定义知 $\mathrm{II}=\mathrm{II}_\nu$，于是

$$S(X, Z) = \mathrm{II}(X, Z)\nu, \quad \forall X, Z \in \mathscr{T}(M),$$

所以

$$\begin{aligned}\perp \tilde{D}_Y S(X, Z) &= \perp\{(Y\mathrm{II}(X, Z))\nu + \mathrm{II}(X, Z)\tilde{D}_Y \nu\} \\ &= (Y\mathrm{II}(X, Z))\nu.\end{aligned}$$

另一方面，如果 $\tilde{M}$ 有常截面曲率 c，那么

$$\tilde{R}_{XY}Z = c(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X\}$$

(见 §5 引理 11)，所以如果 $X, Y, Z \in \mathscr{T}(M)$，则 $\tilde{R}_{XY}Z \in \mathscr{T}(M)$，即

$$\perp \tilde{R}_{XY}Z = 0.$$

将这里的计算代入命题 15 即得

$$\begin{aligned}0 &= \{Y\mathrm{II}(X, Z) - \mathrm{II}(D_Y X, Z) - \mathrm{II}(X, D_Y Z)\} \\ &\quad - \{X\mathrm{II}(Y, Z) - \mathrm{II}(D_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y, D_X Z)\} \\ &= (D_Y \mathrm{II})(X, Z) - (D_X \mathrm{II})(Y, Z).\end{aligned}$$

证毕.

我们现在描述高斯，Codazzi 方程的一个基本应用，即导出给定第二基本形式的超曲面的存在唯一性．首先我们处理唯一性部分．因为第二基本形式产生于讨论子流形 M 在 $\tilde{M}$ 中的无穷小形状，所以就能期望：两个等距并具有相同的第二基本形式的超曲面有相同的形状．为简化事情，只考虑

$$\tilde{M} = \boldsymbol{R}^{n+1}.$$

定理 15 设 M，M' 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中两个超曲面，其上分别选定单位法向量场 ν，ν'．设 φ: $M \to M'$ 是一个等距同构且使得 M，M' 上的第二基本形式 II，II' 满足

$$\mathrm{II}(X, Y) = \mathrm{II}'(d\varphi(X), d\varphi(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathscr{T}(M),$$

则 M 与 M' 是合同的，即存在一个等距同构 Φ: $\boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ 使得 $\Phi|_M = \varphi$.

证明 固定 $x_0 \in M$，设 $\{y^1, \cdots, y^n\}$ 是 M 中 x_0 附近的坐标函数．令 $Y_i = \dfrac{\partial}{\partial y_i}$，我们有基本方程：

$$\begin{cases}\widetilde{D}_{Y_i}Y_j = D_{Y_i}Y_j - II(Y_i, Y_j)\nu, \\ \widetilde{D}_{Y_i}\nu = A(Y_i),\end{cases} \qquad \forall i,\ j \qquad (13.11)$$

(见(13.9)与(13.2))．我们将会看出：固定 x_0，$\nu(x_0)$ 与 M_{x_0}（即固定 $Y_1(x_0)$，$\cdots$，$Y_n(x_0)$）之后，(13.11)导致在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中 x_0 的某个邻域内完全决定 M．为此我们把 Y_i，ν 看成一些函数：$M \to \boldsymbol{R}^{n+1}$，想想 $\widetilde{D}$ 恰是方向导数，故有

$$\widetilde{D}_{Y_i}Y_j = \frac{\partial Y_j}{\partial y^i}, \quad \widetilde{D}_{Y_i}\nu = \frac{\partial \nu}{\partial y^i},$$

令

$$D_{Y_i}Y_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k Y_k, \quad II(Y_i, Y_j) = h_{ij}, \quad A(Y_i) = \sum_l a_i^l Y_l.$$

因按定义，$\langle A(Y_i), Y_j\rangle = II(Y_i, Y_j)$，故

$$a_i^l = \sum_k g^{kl} h_{ik}.$$

于是(13.11)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Y_j}{\partial y^i} = \sum\limits_k \Gamma_{ij}^k Y_k - h_{ij}\nu, \\[2ex] \dfrac{\partial \nu}{\partial y^i} = \sum\limits_{j,k} (g^{kj}h_{ji})Y_k.\end{cases} \qquad (13.12)$$

这个偏微分方程组中共有 n^2+n 个方程，而未知量只有 $n+1$ 个，它们是 $\{Y_1, \cdots, Y_n, \nu\}$．对于 x_0 附近的点 x，令 γ 是 M 中一条连 x_0 至 x 的曲线（即 $\gamma\subset M$，$\gamma(0) = x_0$，$\gamma(1) = x$），于是可将(13.12)限制在 γ 上得到一个常微分方程组．确切地说，记

$$Y_i(t) \equiv Y_i(\gamma(t)), \quad \nu(t) \equiv \nu(\gamma(t)),$$

那么从(13.12)得

$$\begin{cases}\dfrac{dY_j}{dt} = \sum\limits_{k,i} (\Gamma_{ij}^k\circ\gamma)\dot{\gamma}^i Y_k - \sum\limits_i (h_{ij}\circ\gamma)\dot{\gamma}^i\nu, \\[2ex] \dfrac{d\nu}{dt} = \sum\limits_{i,j,k} (g^{kj}\circ\gamma)(h_{ji}\circ\gamma)\dot{\gamma}^i Y_k.\end{cases}$$

于是当给定 g_{ij}, h_{ij} 时，$\{Y_1(x), \cdots, Y_n(x), \nu(x)\}$ 完全由初值 $\{Y_1(x_0), \cdots, Y_n(x_0), \nu(x_0)\}$ 决定. 令

$$f^i = x^i|_M, \quad \forall i,$$

其中 $\{x^1, \cdots, x^{n+1}\}$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的标准坐标函数，于是

$$Y_i = \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \equiv \left(\frac{\partial f^1}{\partial y^i}, \cdots, \frac{\partial f^{n+1}}{\partial y^i}\right) \equiv \frac{\partial f}{\partial y^i},$$

这里 $f \equiv (f^1, \cdots, f^{n+1})$ 就是 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的自然嵌入映射. 因此知道 $\{Y_i\}$ 就意味着知道

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

另外又已知 $f(x_0) = x_0$，从而给出 f 在 x_0 的一个邻域内的值.

现在就来完成定理的证明. 设 $x_0 \in M$, $\varphi(x_0) = x_0'$. 令

$$\Phi: \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{n+1}$$

是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的等距同构，使得

$$\Phi|_{M_{x_0}} = \mathrm{d}\varphi: \ M_{x_0} \to M_{x_0'},$$

于是上面的论证表明 $\Phi|_M = \varphi$. 这是因为 $\varphi(M)$ 与 M' 在 x_0' 的某邻域内都满足相同的方程(13.12)并且具有相同的初值所致. 证毕.

由上面的论证可知，如果我们能解(13.12)，那么我们也就可能证明一个存在性定理：存在唯一的超曲面具有给定的黎曼度量和第二基本形式. 可是(13.12)不总是可解的，因为它等价于(13.11)，而(13.11)中的 $\mathrm{II}(Y_i, Y_j)$ 满足高斯，Codazzi 方程.

$$\begin{cases} 0 = \langle R_{Y_iY_j}Y_k, Y_l\rangle - \mathrm{II}(Y_i, Y_k)\mathrm{II}(Y_j, Y_l) \\ \qquad + \mathrm{II}(Y_i, Y_l)\mathrm{II}(Y_j, Y_k), \\ (\mathrm{D}_{Y_i}\mathrm{II})(Y_j, Y_k) = (\mathrm{D}_{Y_j}\mathrm{II})(Y_i, Y_k), \end{cases} \tag{13.13}$$

其中 R 是 M 的曲率张量. 显然 (13.13) 是 (13.11) (因而也是(13.12))可解的必要条件. 更有甚者，他们原来也是充分条件，即(13.13)正是过定方程组(13.11)的可积条件. (从这个角度看，你

就应该知道：微分(13.11)就可得(13.13)．R^3中曲面的经典的高斯，Codazzi 方程正是这样发现的．)这就提醒我们立刻想到 Frobenius **定理**，因为 Frobenius 定理恰恰处理线性一阶过定偏微分方程组．在［KN，II］第 47 至 51 页中证明这个超曲面的存在定理但没提到 Frobenius 定理，实际上证明的过程只是重证一次 Frobenius 定理罢了．在［S8，IV］第 61 至 70 页中(同样［BC］，§10.8）Frobenius 定理倒是明明白白地讲了出来．这样做是要增加一些负担的，即要用闭的**微分理想**来重述每一件事，那是因为近代陈述和证明 Frobenius 定理时都是这样的．下面确切地叙述超曲面的存在定理．

超曲面的存在定理　给定一个 n 维黎曼流形及其上一个对称张量 II，它满足(13.13)，那么 M 可以局部等距嵌入到 R^{n+1} 中去，使得相对于它的某一单位法向量场的第二基本形式恰是 II．此外这个嵌入在差一个整体等距同构 φ：$R^{n+1}\to R^{n+1}$ 下是唯一的．

这个定理容易推广．可以用 $n+1$ 维的黎曼流形 $\widetilde{M}$ 代替 R^{n+1}．当然这时要相应地修改(13.13)．此外也可以讨论高余维的情形，这时还有另外的可积条件要加到(13.13)中去，它们是 Ricci **方程**，是来自考虑 $\perp\widetilde{R}_{XY}\nu$ 这一项的，其中 X，$Y\in\mathscr{T}(M)$，$\nu\in\mathscr{N}(M)$．欲知详情，请阅［S8，IV］第 64 至 74 页，或［T1］．

§ 14　体积的变分和极小子流形

本节参考文献

[S8, IV]，第 416 页至第 424 页，第 513 页至第 539 页。

[L12]，　第一章，§§ 1，2，8。

[C5]，　§§ 2，8。

在这一节中，我们考虑测地线的高维推广。全测地子流形是候选的一类，但除了对一维(即测地线本身)外，它们几乎是决不存在的。转而如我们以 § 6 的引理 1 作为我们的出发点，把寻找曲线上弧长函数的临界点换成寻找固定维数 k 的子流形上体积函数的临界点，于是我们就得到了非常自然的推广。它们是 k 维**极小子流形**。

形式上，在黎曼流形 $\widetilde{M}$ 中给定了一个具有边界的**浸入的**紧致子流形

$$f:\ M\to\widetilde{M}\ (\dim M=n<\tilde{n}=\dim\widetilde{M}),$$

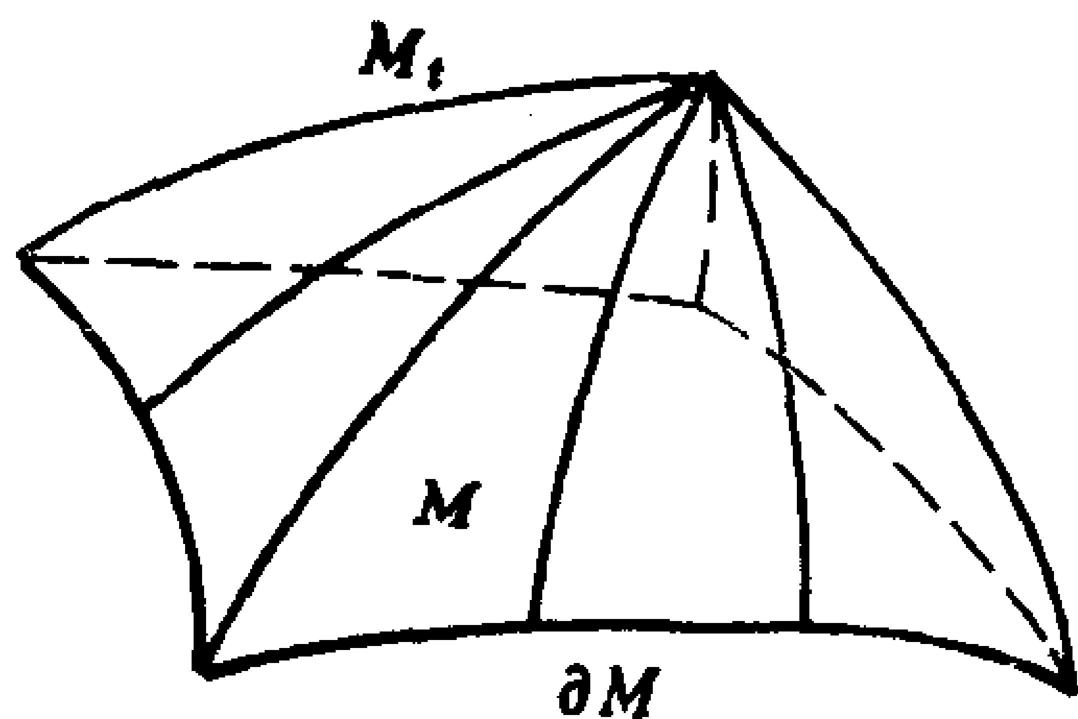


图　14.1

M 的**正常变分** $\{M_t\}$ 是一个 C^∞ 映射 $F:\ M\times[0,\varepsilon]\to\widetilde{M}$，使得如果 $f_t(x)\equiv F(x,t)$，并记 M_t 为 $f_t:\ M\to\widetilde{M}$ 的像(图 14.1)，则有

(1) $f_0=f$;

(2) $f_t|_{\partial M}=f|_{\partial M}$, $\forall t$,

(3) 每一个 $f_t:\ M\to\widetilde{M}$ 是一个浸入。

下面的讨论需要用在§1末所提及的映射上的向量场及诱导联络的概念。设 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是在 $[0, \varepsilon]$ 上的标准向量场，于是沿给定浸入 f: $M \to \widetilde{M}$ 的**变分向量场** W 乃是对每一点 $x \in M$ 指定 $\widetilde{M}_{f(x)}$ 中的一个向量 $\mathrm{d}F\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\right)$。体积 $V(M_t)$ 是指 M 关于度量 $f_t^*\tilde{g}$ 的体积，这里 $\tilde{g}$ 是 $\widetilde{M}$ 的度量。令 $V(t) = V(M_t)$。当 $V' = 0$ 时，我们称 M 关于 $\{M_t\}$ 是**稳态的** (stationary)(或更精确地，浸入 f: $M \to \widetilde{M}$ 是稳态的)。设 M 是 $\widetilde{M}$ 的任意浸入子流形，如对 M 中每一个具有 C^∞ 边界 ∂D 的定向紧致子区域 D，D 关于每一个正常变分是稳态的，则称 M 为**极小**。我们将在本节末的引理9中证明，至少对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的超曲面来说，"极小"一词的用法是妥当的。

引理1 浸入子流形 f: $M \to \widetilde{M}$ 是极小的充要条件是其平均曲率恒为零。

对这个命题需要作一些解释。先假设 f 是一个嵌入，于是我们把 M 与 $f(M)$ 恒同。在此情形下，$M \subset \widetilde{M}$ 的平均曲率法向量场 η 被定为 M 的第二基本形式的迹。详细地说，如 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是 M 上的一组局部的标架场，则

$$\eta \equiv -\perp \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathrm{D}}_{E_i} E_i. \tag{14.1}$$

这里我们已利用了上一节中的记号约定：D, $\widetilde{\mathrm{D}}$ 分别是 M 和 $\widetilde{M}$ 的 Levi-Civita 联络，且对每一点 $x \in M$，正交投影用

$$\perp:\ \widetilde{M}_x \to M_x^{\perp},$$
$$\top:\ \widetilde{M}_x \to M_x$$

来表示。如果 f: $M \to \widetilde{M}$ 仅仅是一个浸入，于是对每一个充分小的邻域 $\mathscr{U} \subset M$，$f|_{\mathscr{U}}$ 是一个嵌入，因此在 $\mathscr{U}$ 上，η 是有意义的。可定义 η 为 f 上的向量场，使 $\eta(x) \in M_{f(x)}^{\perp}$。称 η 为 M 在 $\widetilde{M}$ 中的**平均曲率法向量场**。M 的**平均曲率**正好是 $|\eta|$。

引理 1 是下面更精确的命题的直接推论。

命题 2（体积的第一变分） 设M是浸入在$\widetilde{M}$中的一个具有边界的定向紧致流形，且设$\{M_t\}$为M的一个正常变分，于是

$$V'(0)=\int_M \langle \eta, W\rangle \,\mathrm{d}v,$$

此处 $\mathrm{d}V$ 是M上的标准测度，W是$\{M_t\}$的变分向量场，且η是M在$\widetilde{M}$中的平均曲率法向量场。

证明 令Ω_t是M上度量$f_t^*\tilde{g}$的体积元，此处 f_t: $M\to\widetilde{M}$. 我们将证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega_t\Big|_{t=0}=(\mathrm{div}\top W)\Omega_0+\langle \eta, W\rangle\Omega_0. \qquad (14.2)$$

首先注意上式左边是有意义的：在每点 $x\in M$，$t\longmapsto \Omega_t(x)$ 是在有限维向量空间 $\Lambda^n M_x$ 中的一条 C^∞ 曲线，于是求导数是有意义的。进而有

$$V'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\int_M \Omega_t=\int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\Omega_t,$$

上式最后一个等式是利用了在通常微积分中诸如含参变量积分的微分及 C^∞ 的单位分解把M上的积分化为在坐标邻域中的积分的事实。于是由 (14.2) 及 § 11 中的 Green 定理，再注意到对每一个正常变分有 $W|_{\partial M}\equiv 0$，命题就可证得。

现在我们在点 $x\in M$ 处证明 (14.2) 式。设 $\{x^i\}$ 是 x 点周围的坐标函数，且令

$$\Omega_t=\sqrt{G_t}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n,$$

如通常那样，记

$$f_t^*\tilde{g}=\sum_{i,j}(g_t)_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j,$$

则 $G_t=\det[(g_t)_{ij}]$。并记 $f_t^*\tilde{g}=\langle\ ,\ \rangle_t$，则由在 n-向量上内积的定义（见 § 11）可得到

$$G_t = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle_t. \qquad (14.3)$$

因为 f_t: $M \to \widetilde{M}$ 是一个浸入，它在 x 的一个邻域 $\mathscr{U}$ 中是一个嵌入，我们可把 $\mathscr{U}$ 与 $f_t(\mathscr{U})$ 恒同，于是 $\langle\ ,\ \rangle_t$ 正好是在 $f(\mathscr{U})$ 上诱导的度量。所以 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 等同于 $\mathrm{d}F\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right) = W$，令 $\widetilde{\mathrm{D}}$ 是 $\widetilde{M}$ 的 Levi-Civita 联络，于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Omega_t = \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sqrt{G_t}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n. \qquad (14.4)$$

利用 (14.3) 式得出

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \sqrt{G_t} = \frac{1}{\sqrt{G_0}} \left\langle \widetilde{\mathrm{D}}_W \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \right), \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \right\rangle_0.$$

记 $\perp W = \nu$ 及 $\top W = \tau$，则由 (12.2) 及 (13.2) 有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}_W \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\mathrm{D}}_W \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} W \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \\
&= \sum_i \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tau \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \\
&\quad + \sum_i \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \widetilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \\
&= \{\mathrm{tr}\,(X \longmapsto \widetilde{\mathrm{D}}_X \tau) + \mathrm{tr}\,(X \longmapsto \widetilde{\mathrm{D}}_X \nu)\} \\
&\quad \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n} \\
&= (\mathrm{div}\,\tau + \mathrm{tr}\,A_\nu) \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n},
\end{aligned}$$

再连同 (14.4) 及 (13.4) 后，我们就得到了 (14.2) 式。证毕。

这个命题有几个有兴趣的推论．假设M是$\widetilde{M}$中的一个浸入超曲面，因为M的平均曲率正好是主曲率之和，于是

推论 3 超曲面是极小子流形的充要条件是它在每点处的主曲率之和为零．

推论 4 非正截面曲率流形的极小子流形具有非正的 Ricci 曲率．

证明 设M是$\widetilde{M}$的一个浸入极小子流形．令R, Ric 分别为M的曲率和 Ricci 曲率，$\widetilde{R}$, $\widetilde{\text{Ric}}$ 分别为$\widetilde{M}$的曲率和 Ricci 曲率．给定$x\in M$，令X是M_x中的一个单位向量，我们要证明

$$\text{Ric}(X, X)\leqslant 0.$$

设$\{e_1,\cdots,e_n\}$为M_x的一组幺正基，使得$e_1=X$，由 Gauss 方程可得

$$\begin{aligned}\text{Ric}(X,X)=\text{Ric}(e_1,e_1)&=\sum_i\langle R_{e_1e_i}e_1,e_i\rangle\\&=\sum_i\langle\widetilde{R}_{e_1e_i}e_1,e_i\rangle+\sum_i\langle S(e_1,e_1),S(e_i,e_i)\rangle\\&\quad-\sum_i|S(e_1,e_i)|^2.\end{aligned}$$

因为$\eta=0$等价于$\sum\limits_i S(e_i,e_i)=0$，所以上式第二行中的第二个和式为零，于是$\text{Ric}(X,X)\leqslant 0$．证毕．

推论 5 在非正截面曲率的单连通完备流形$\widetilde{M}$中不存在紧致的极小子流形．

证明 设M是$\widetilde{M}$的任何紧致子流形．固定$O\in\widetilde{M}-M$，且设ρ为从O出发到M中各点距离．假设ρ在$x_0\in M$处达到最大值，由 § 6 的定理 3 得到$\widetilde{D}^2\rho^2(x_0)>0$ ($\widetilde{D}$为$\widetilde{M}$的 Levi-Civita 联络)．令$\{e_1,\cdots,e_n\}$为M_{x_0}的一组幺正基，且对每一i，令γ_i: $[0,\varepsilon]\to M$是M的使得$\dot{\gamma}_i(0)=e_i$的测地线，于是对每一个i，

$$0<D^2\rho^2(e_i,e_i)=\frac{d^2}{du^2}\rho(\gamma_i(u))|_{u=0}-(\widetilde{D}_{\dot{\gamma}_i(0)}\dot{\gamma}_i)\rho,$$

因为 $\rho(\gamma_i(u))$ 在 $u=0$ 处达到最大，所以二阶导数项 $\leqslant 0$. 进而，由 § 13 的 (13.9) 可得

$$-\widetilde{D}_{\dot{\gamma}_i(0)}\dot{\gamma}_i = S(e_i, e_i) - D_{\dot{\gamma}(0)}\dot{\gamma} = S(e_i, e_i). \qquad (14.5)$$

于是将前式对 i 作和后就有

$$0 < \sum_i S(e_i, e_i)\rho = \eta(x_0)\rho,$$

这里 η 是M上的平均曲率法向量场. 因此 η 在不能为零，所以M不是极小的. 证毕.

还有另一种证法，它本身也具有独立的兴趣. 给定 f: $\widetilde{M} \to \boldsymbol{R}$. 我们要把 $\Delta(f|_M)$ 与 $\widetilde{D}^2 f$ 联系起来，这里 Δ 是M上的 Laplace 算子, $\widetilde{D}$ 是 $\widetilde{M}$ 上的 Levi-Civita 联络. 设 $x \in M$, 且令 $\{e_i\}$ 是 M_x 的一组幺正基. 对每一个 i, 设 ζ_i: $[0, \varepsilon] \to M$ 是M中的测地线，使得 $\dot{\zeta}_i(0) = e_i$. 于是

$$\begin{aligned}\Delta(f|_M) &= \mathrm{tr}D^2 f = \sum_{i=1}^{n} D^2 f(e_i, e_i)\\ &= \sum_i \frac{d^2}{d u^2} f(\zeta_i(u))|_{u=0} - (D_{\dot{\zeta}_i(0)}\dot{\zeta}_i)f\\ &= \sum_i \frac{d^2}{d u^2} f(\zeta_i(u))|_{u=0},\end{aligned} \qquad (14.6)$$

这里 D 是M上的 Levi-Civita 联络. 另一方面，由 (14.5) 有

$$\begin{aligned}\sum_i \widetilde{D}^2 f(e_i, e_i) &= \sum_i \frac{d^2}{d u^2} f(\zeta_i(u))|_{u=0} - \sum_i (\widetilde{D}_{\dot{\zeta}_i(0)}\dot{\zeta}_i)f\\ &= \sum_i \frac{d^2}{d u^2} f(\zeta_i(u))|_{u=0} - \sum_i S(e_i, e_i)f,\end{aligned}$$

于是

$$\Delta(f|_M) = \sum_i \widetilde{D}^2 f(E_i, E_i) + \eta f. \qquad (14.7)$$

此处 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是M中任何的局部标架场，η 是平均曲率法向量场. 特别，当M是极小，且 $\widetilde{D}^2 f > 0$ (f 在 $\widetilde{M}$ 中是严格凸的) 时，有 $\Delta(f|_M) > 0$ (于是称 $f|_M$ 是严格次调和的). 在推论 5 的假设

下，设M是紧致、极小，且令$f=\rho^2$。如$\rho^2|_M$在$x_0\in M$处达到它的最大值，则$\Delta(\rho^2|_M)(x_0)\leqslant 0$（见(14.6)），但是$\tilde{D}^2\rho^2>0$，所以$\Delta(\rho^2|_M)>0$处处成立，因而产生矛盾。

极小子流形的更深入的研究依赖于偏微分方程的深入的结果，这是因为与测地线是非线性常微分方程组的解相类似，极小子流形是非线性的椭圆型偏微分方程组的解。为更详尽起见，设$f: M\to\tilde{M}$为一极小浸入，局部地由$(f^1,\cdots,f^n)$所给出。换言之，相对于M中的坐标系$\{y^1,\cdots,y^n\}$及$\tilde{M}$中的坐标系$\{x^1,\cdots,x^n\}$，$f^\alpha=x^\alpha\circ f$。令

$$\sum_{i,j} g_{ij}\,\mathrm{d}y^i\,\mathrm{d}y^j \quad 及 \quad \sum_{\alpha,\beta}\tilde{g}_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta$$

局部地为M及$\tilde{M}$上的度量，则

$$g_{ij}=\sum_{\alpha,\beta}\tilde{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial y^j}. \tag{14.8}$$

因为M是极小，所以对M中每一个幺正基，有$\sum_i S(e_i,e_i)=0$，或等价地，

$$\sum_{i,j} g^{ij}S\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=0$$

如通常一样，设$\sum_j g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$，因为$S(X,Y)=\mathrm{D}_XY-\tilde{\mathrm{D}}_YX$（见§13的引理6），我们得到

$$\sum_{i,j} g^{ij}\tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\partial}{\partial y^j}-\sum_{i,j} g^{ij}\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\partial}{\partial y^j}=0. \tag{14.9}$$

现在$\dfrac{\partial}{\partial y^i}=\sum_\alpha\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial y^i}\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$，且设

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\partial}{\partial y^j}=\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial y^k} \quad 及 \quad \tilde{\mathrm{D}}_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}=\sum_\gamma\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\gamma},$$

于是(14.9)成为

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ i,j}}\left(g^{ij}\frac{\partial^2 f^\beta}{\partial y^i\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^\beta}+g^{ij}\frac{\partial f^\beta}{\partial y^i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial y^j}\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\right)$$

$$-\sum_{i,j,k,\alpha}g^{ij}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial y^k}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=0. \tag{14.10}$$

因此对每一 $\beta=1,\cdots,\tilde{n}$，我们有

$$\sum_{i,j}g^{ij}\frac{\partial^2 f^\beta}{\partial y^i\partial y^j}+\sum_{i,j,k,\sigma,\tau}g^{ij}\left(\frac{\partial f^\sigma}{\partial y^i}\frac{\partial f^\tau}{\partial y^j}\tilde{\Gamma}^\beta_{\sigma\tau}-\frac{\partial f^\beta}{\partial y^k}\Gamma^k_{ij}\right)=0.$$

再考虑到 (14.8) 及

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial y^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l}\right),$$

我们看到 (14.10) 是一个**拟线性的**椭圆型方程组 (对作为最高项的二阶项来说是线性的)。如果 $f: M\to\tilde{M}$ 是黎曼流形间的一个极小浸入，则函数 $(f^1,\cdots,f^{\tilde{n}})\equiv f$ 必适合上述方程组.

当M是 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 中的一个极小图象时 (即由函数 $\mathscr{U}\to\boldsymbol{R}^k$ $(\mathscr{U}\subset\boldsymbol{R}^n)$ 的图象所表出的一个极小子流形)，(14.10) 可大大简化。这时我们可取 $\{x^\alpha\}$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 中的标准坐标系，使得 $\tilde{\Gamma}^\beta_{\sigma\tau}\equiv 0$。进而

$$f=(y^1,\cdots,y^n,f^{n+1}(y),\cdots,f^{n+k}(y)).$$

所以当 $\beta=1,\cdots,n$ 时，(14.10) 化为

$$\sum_{i,j}g^{ij}\Gamma^k_{ij}=0,\quad \forall\, k=1,\cdots,n, \tag{14.11}$$

而 $\beta=n+1,\cdots,n+k$ 时，(14.10) 化为

$$\sum_{i,j}g^{ij}\frac{\partial^2 f^A}{\partial y^i\partial y^j}-\sum_{i,j,k}\frac{\partial f^A}{\partial y^k}(g^{ij}\Gamma^k_{ij})=0,$$

$$\forall A=n+1,\cdots,n+k.$$

由 (14.11) 知，第二项为零。于是，为了使图象

$$y\longmapsto(f^{n+1}(y),\cdots,f^{n+k}(y))\quad(y\in\boldsymbol{R}^n)$$

为 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 中的一个极小子流形的充要条件是

$$\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f^A}{\partial y^i \partial y^j} = 0, \quad A = n+1, \cdots, n+k, \quad (14.12)$$

这里 $[g^{ij}]$ 是矩阵 $[g_{ij}]$ 的逆，$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_A \frac{\partial f^A}{\partial y^i} \frac{\partial f^A}{\partial y^j}$.

在极小图象 $M^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ 的情形下，$M = \{(y^1, y^2, f(y))\}$，方程组 (14.12) 成了一个方程. 我们可以把它详细地写出来. 设 $G = \det[g_{ij}]$，这里

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial y^2} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)^2 \end{bmatrix},$$

于是

$$[g^{ij}] = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)^2 & -\frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial y^2} & 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

因此，**极小曲面的方程**是

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{(\partial y^1)^2} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{\partial f}{\partial y^2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^2}$$
$$+ \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{(\partial y^2)^2} = 0,$$

或

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y^i}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)^2}} \right) = 0.$$

这个方程是被 Lagrange 发现的.

现在我们来求体积的第二变分. 设 $\{M_t\}$ 是浸入在 $\widetilde{M}$ 中的具有边界的紧致流形的一个正常变分，且设 $V(t) = V(M_t)$. 如

在测地线情形那样，只要有 $V'(0)=0$，我们就去进一步计算 $V''(0)$. 考虑到命题 2 中变分向量场 W 的切向分量 $\top W$ 对体积的第一变分没有贡献，我们能将计算简化，于是从现在起，我们假设 $\{M_t\}$ **是法向正常变分**，即 $W\perp f(M)$，这里 $f: M\to\widetilde{M}$ 是所给定的浸入. 为了叙述第二变分，我们还需要少量新的概念.

设 $\mathscr{N}(M)$ 为 M 的法丛 $\left(即 \bigcup\limits_{x\in M} M_x^{\perp}\right)$，对每一个 $X\in\mathscr{T}(M)$，定义映射 ∇_X: $\mathscr{N}(M)\to\mathscr{N}(M)$ 为

$$\nabla_X\nu=\perp\widetilde{D}_X\nu,$$

这里 $\widetilde{D}$ 为 $\widetilde{M}$ 中的 Levi-Civita 联络. 容易验证 ∇ 具有联络的所有的性质: 对于 M 上的函数 f, g 以及 $X, Y\in\mathscr{T}(M)$, $\nu, \mu\in\mathscr{N}(M)$ 有

(1) $\nabla_{fX+gY}=f\nabla_X+g\nabla_Y$;

(2) $\nabla_X(f\nu)=(Xf)\nu+f\nabla_X\nu$;

(3) $\nabla_X(\nu+\mu)=\nabla_X\nu+\nabla_X\mu$.

我们称 ∇ 为**在 M 的法丛 $\mathscr{N}(M)$ 上的诱导联络**. 于是利用 ∇，我们能以类似的方式定义 ∇ **的 Laplace 算子**:

$$\Delta\nu\equiv\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tr}\nabla^2\nu\equiv\sum_{i=1}^{n}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nu-\nabla_{D_{E_i}E_i}\nu;\quad \forall\nu\in\mathscr{N}(M),$$

这里 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是 M 中的任何幺正标架场.

第二个新的概念是 $\mathscr{N}(M)$ **的 Ricci 张量** $\overline{\mathrm{Ric}}$，定义

$$\overline{\mathrm{Ric}}:\ \mathscr{N}(M)\to\mathscr{N}(M)$$

为

$$\overline{\mathrm{Ric}}(\nu)=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{R}_{E_i\nu}E_i,\quad \forall\nu\in\mathscr{N}(M),$$

这里 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是 M 中的任何标架场，且 $\widetilde{R}$ 是 $\widetilde{M}$ 的曲率张量.

最后，对每一 $\nu\in\mathscr{N}(M)$，我们有第二基本形式，它在每点 $x\in M$ 给出了一个对称变换 A_ν: $M_x\to M_x$. A_ν 的算子范数 $|A_\nu|$

定义为

$$|A_\nu|^2 = \sum_{i,j} \langle A_\nu(e_i), e_j \rangle^2, \qquad (14.13)$$

这里 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 M_x 的任何幺正基. 由 A_ν 的定义知道

$$|A_\nu|^2 = \sum_{i,j} \langle S(e_i, e_j), \nu \rangle^2,$$

$$\forall x \in M, \forall M_x \text{ 中的幺正基 } \{e_1, \cdots, e_n\}.$$

现在令 S^t 表示 S: $M_x \otimes M_x \to M_x^\perp$ 的转置, 即 S^t: $M_x^\perp \to M_x \otimes M_x$ 使得

$$\langle S^t(\mu), V \otimes W \rangle = \langle \mu, S(V, W) \rangle, \quad \forall \mu \in M_x^\perp, \forall V, W \in M_x.$$

于是由线性代数可得出:

$$|A_\nu|^2 = \langle (S \circ S^t)(\nu), \nu \rangle. \qquad (14.14)$$

命题 6 (体积的第二变分) 设 M 是极小地浸入 $\widetilde{M}$ 中的一个具有边界的定向紧致流形, f: $M \to \widetilde{M}$, 且设 $\{M_t\}$ 为 M 的法向正常变分, 其变分向量场为 $\nu \in \mathscr{N}(M)$, $V(t) = V(M_t)$. 则

$$V''(0) = \int_M \langle -\bar{\Delta}\nu - \overline{\mathrm{Ric}}\,(\nu) - (S \circ S^t)(\nu), \quad \nu \rangle \mathrm{d}v.$$

我们将给出证明的主要思想. 命题 2 已给出了 $V'(0)$ 的公式, 但在那里 $t = 0$ 附近没有具体给值, 事实上我们可以得到公式

$$V'(t) = \int_M \langle \eta_t, \nu_t \rangle \Omega_t,$$

这里 η_t 是 $f_t(M) \subset \widetilde{M}$ 的平均曲率法向量场, ν_t 是在 $f_t(M)$ 上的变分向量场, Ω_t 是 $f_t(M)$ 上诱导度量的体积元. 于是如命题 2 证明中的第一部分那样, 可得到

$$\begin{aligned} V''(0) &= \int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \langle \eta_t, \nu_t \rangle \Omega_t \\ &= \int_M \langle \mathrm{D}_\nu \eta, \nu \rangle \Omega \\ &\quad + \int_M \langle \eta, \mathrm{D}_\nu \nu \rangle \Omega + \langle \eta, \nu \rangle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Omega_t. \end{aligned}$$

这里 $\eta = \eta_0$, $\nu = \nu_0$ 及 $\Omega = \Omega_0$. 因为M为极小, $\eta = 0$, 所以最后一个积分为零。而直接的计算表明

$$\langle \mathrm{D}_\nu \eta, \nu \rangle = -\langle \bar{\Delta}\nu + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu) + (S\circ S^t)(\nu), \nu \rangle + f,$$

这里 f 是M上的某个满足 $\int_M f\Omega = 0$ 的函数。详细的证明可在 [L2] 的第 49 至 50 页中找到。因为证明的细节对以下的讨论不起重大的作用,故从略。

从 $V''(0)$ 的公式中的被积项可引出方程

$$\bar{\Delta}\nu + \overline{\mathrm{Ric}}(\nu) + (S\circ S^t)(\nu) = 0, \quad \forall \nu \in \mathscr{N}(M).$$

它类似于测地线的 Jacobi 方程。我们可进一步定义极小子流形的指标形式,并得出类似的 Morse 指数定理。可参看 [S7]。

命题 6 的一个重要的特殊情形是M为 $\widetilde{M}$ 中的极小超曲面。假设 $\widetilde{M}$ 是可定向的,于是存在着M在 $\widetilde{M}$ 中的一个单位法向量场 N, $N \in \mathscr{N}(M)$, 且 $|N| = 1$, 因此我们能把变分向量场 ν 表示为

$$\nu = uN,$$

这里 u: $M \to \boldsymbol{R}$, $u|_{\partial M}=0$, 注意在这情形下,对任何X有 $\nabla_X N = 0$, 这是因为

$$\langle \nabla_X N, N \rangle = \langle \widetilde{\mathrm{D}}_X N, N \rangle = \frac{1}{2} X\langle N, N \rangle = \frac{1}{2} X \cdot 1 = 0.$$

于是

$$\bar{\Delta}\nu = \left\{ \sum_i E_i E_i u - (\mathrm{D}_{E_i} E_i) u \right\} N = (\Delta u) N,$$

其中 $\Delta \equiv \mathrm{tr}\,\mathrm{D}^2$ 是M对函数的通常的 Laplace 算子。

其次,

$$\langle \overline{\mathrm{Ric}}(\nu), \nu \rangle = u^2 \sum_{i=1}^{n} \langle \widetilde{\mathrm{Ric}}_{E_i N} E_i, N \rangle = u^2 \widetilde{\mathrm{Ric}}(N, N).$$

最后,由 (14.14), (14.13) 可得

$$\langle (S\circ S^t)(\nu), \nu \rangle = u^2 \sum_{i,j} \langle A_N(e_i), e_j \rangle^2.$$

在 § 13 例 1 的记号下，我们把 A_N 记为 A，于是如果 $p_1, \cdots, p_n$ 为 $M \subset \widetilde{M}$ 的主曲率，则

$$|A|^2 = \sum_{i,j} \langle A(e_i), e_j \rangle^2 = \sum_i p_i^2. \tag{14.15}$$

总括起来，现在就得到了 $V''(0)$ 的公式为

$$V''(0) = \int_M \{-u\Delta u - u^2(\widetilde{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2)\} \mathrm{d}\, v. \tag{14.16}$$

设M是浸入在 $\widetilde{M}$ 中的极小子流形。如对M中每一个具有 C^∞ 边界 ∂D 的可定向紧致子域 D，它的每一个法向正常变分具有非负的体积第二变分，则称 M 是**稳定的**。对大多数应用来说，M，$\widetilde{M}$ 是可定向的，所以D的可定向性是自动成立的。于是，一个稳定的极小子流形是这样的子流形，即对所有**具有紧致支集的法**向正常变分，它有非负的体积第二变分。设M为 $\widetilde{M}$ 的一个极小子流形，在M中任意给定一个具有 C^∞ 边界 ∂D 的紧致子域 D，如果 $\widetilde{M}$ 中任何其他的 C^∞ 子流形 $\bar{D}$，只要它的边界 $\partial\bar{D} = \partial D$，总有

$$V(\bar{D}) > V(D),$$

则称此极小子流形是**(整体)极小化的**。显然一个极小化的极小子流形是稳定的。

命题 7 设 M，$\widetilde{M}$ 为可定向的。设M是极小地浸入在 $\widetilde{M}$ 中的超曲面，则 M 为稳定的充要条件是：对任何具有紧致支集的 C^∞ 函数 u：$M \to \boldsymbol{R}$，

$$\int_M u^2(\widetilde{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2) \mathrm{d}\, v \leqslant \int_M |\mathrm{d}\, u|^2 \mathrm{d}\, v,$$

其中 $\widetilde{\mathrm{Ric}} = \widetilde{M}$ 上的 Ricci 张量；$N = M$ 上的一个单位法向量场；$A = M$ 关于N的第二基本形式。

证明 这可立刻从 (14.16) 及

$$\int_M |\mathrm{d}\, u|^2 \mathrm{d}\, v = \int_M \mathrm{d}\, u \wedge * \mathrm{d}\, u = \langle\!\langle \mathrm{d}\, u, \mathrm{d}\, u \rangle\!\rangle$$
$$= \langle\!\langle u, \delta\, \mathrm{d}\, u \rangle\!\rangle = -\int_M (u\Delta u) \mathrm{d}\, v$$

得出，这里我们已利用了(12.9)，因为对函数来说，$\Delta = d\delta + \delta d$ 与 $\Delta = \mathrm{tr}\, D^2$ 相差一个符号，见(12.13)后的评论. 证毕.

现在我们给出命题 7 的一个应用，它是由 R. Schoen 和 S. T. Yau (见 [SY1]) 给出的.

定理 8 (Schoen-Yau) 设 $\widetilde{M}$ 为具有正数量曲率的紧致定向 3 维流形，则 $\widetilde{M}$ 中不存在亏格为正的、紧致的稳定极小的浸入 2 维定向子流形.

证明 我们应用命题 7 来证明. 因为M紧致，我们可在命题 7 中选 $u = 1$，所以

$$\int_M (\widetilde{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2) d v \leqslant 0.$$

另一方面，我们可以证明：

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2 = \frac{1}{2}\sigma - K + \frac{1}{2}|A|^2, \qquad (14.17)$$

其中 σ 是 $\widetilde{M}$ 的数量曲率在 M 上的限制，K 是 M 上诱导度量的 Gauss 曲率. 将它积分后我们就得到

$$0 \geqslant \frac{1}{2}\int_M \sigma d v - \int_M K d v + \frac{1}{2}\int_M |A|^2 d v. \qquad (14.18)$$

如果存在这种子流形，由假设 $\int_M \sigma d v > 0$，且由亏格 g 的曲面的 Gauss-Bonnet 定理知道

$$\int_M K d v = 2\pi\chi(M) = 4\pi(1 - g) \leqslant 0,$$

最后连同

$$\int_M |A|^2 d v \geqslant 0$$

一起就和(14.18)产生矛盾，从而定理证得. 而为了证明(14.17)，我们应该把迄今已完成的许多事情综合起来. 令 $x \in M$，设 $\{e_1, e_2\}$ 为 M_x 的一组幺正基，使得对称变换 $A: M_x \to M_x$ 在该组基下是对角化的. 记

$$A(e_1)=\lambda e_1,\quad A(e_2)=\mu e_2.$$

因为M为极小，$\operatorname{tr}A=0$，所以得到 $\lambda=-\mu$。于是

$$\begin{cases}A(e_1)=\lambda e_1,\\A(e_2)=-\lambda e_2.\end{cases}$$

所以$|A|^2=2\lambda^2$。令$N=e_3$，于是$\{e_1,e_2,e_3\}$为$\widetilde{M}_x$的一组么正基。令$\widetilde{K}_{ij}$为$\widetilde{M}$中 Span$\{e_i,e_j\}$ 的截面曲率，故由定义

$$\sigma(x)=\sum_{i,j}\widetilde{K}_{ij}=2\{\widetilde{\mathrm{Ric}}(N,N)+\widetilde{K}_{12}\}(x),$$

由 Gauss 方程的特殊情形（§ 13 的推论 7）得出

$$\widetilde{K}_{12}=K(x)-\det A=K(x)+\lambda^2,$$

于是在x处有

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Ric}}(N,N)+|A|^2&=\left(\frac{1}{2}\sigma-\widetilde{K}_{12}\right)+2\lambda^2\\&=\frac{1}{2}\sigma-(K+\lambda^2)+2\lambda^2\\&=\frac{1}{2}\sigma-K+\lambda^2\\&=\frac{1}{2}\sigma-K+\frac{1}{2}|A|^2.\end{aligned}$$

这就是 (14.17)。证毕。

注意这个证明类似于 Synge 定理（§ 6 中的定理 7）的证明。在 Synge 定理中具有极小长度的测地线在这里被换成了稳定的极小曲面。这是 Synge 定理的证明能被用到高维时的少数几个情形之一。虽然定理 8 很简单，但它是 Schoen 和 Yau 在证明下面所述的一个被物理学家长期以来所猜测的定理（它与**正质量猜测**有联系）中的关键。

定理 设 $\boldsymbol{R}^3$ 中一个黎曼度量在一个紧致集K的外部是平坦的，且处处具有非负数量曲率，则它必为平坦的。

其证明的概要如下：把K用一个更大的立方体包围起来，并把立方体的对面迭合，于是我们得到了一个环面T（图 14.2）。对环面上的诱导度量g而言，它具有非负数量曲率，而且在K的外部为平坦，因而由 Kazdan-Warner 定理（见[KW]）知，如果g确实不平坦的话，则T允许一个具正数量曲率的度量。现在基本群$\pi_1(T)$包含$\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$，它是 2 维环面$\mathscr{T}$的基本群。利用**调和映射**的理论及由 Teichmüller **理论**中的一些已知事实，Schoen-Yau 证明了T必须包含 2 维环面$\mathscr{T}$的一个极小浸入，它是极小化的，于是为稳定的。（这是 Schoen-Yau 文章中定理 3.1 的特殊情形，定理 3.1 是那篇文章的核心。）而定理 8 说明了这是不可能的，因此度量g为平坦，所以$\boldsymbol{R}^3$上的原始度量也是平坦的。

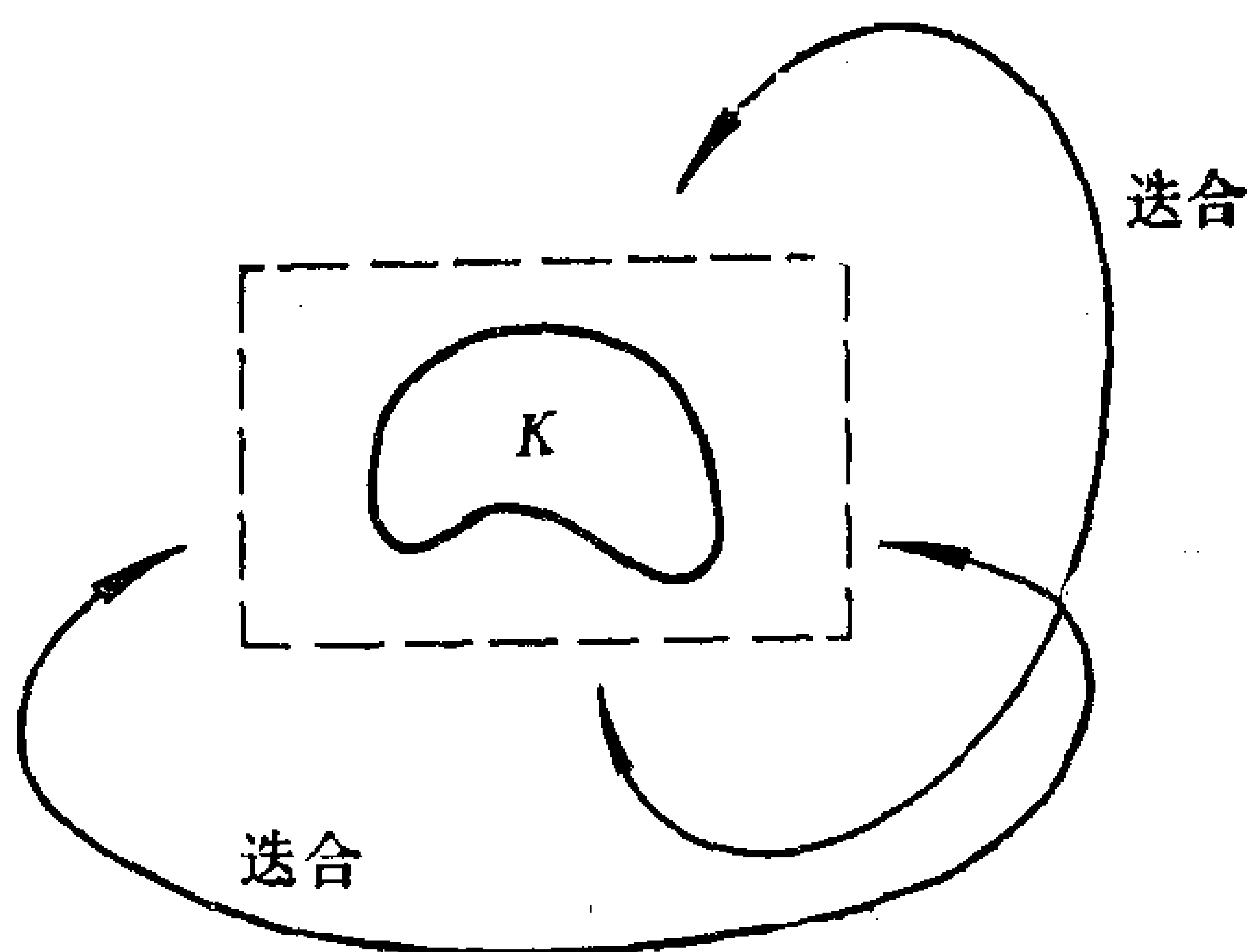


图 14.2

Schoen-Yau 最终证明了正质量猜测，见他们的文章[SY2]与[SY4]。

最后，我们至少对$\boldsymbol{R}^n$中的超曲面来证实“极小”一词是用得很恰当的。

引理 9 设M是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的极小超曲面。如D是M中一个充分小的区域，且具有C^∞边界∂D，于是对$\boldsymbol{R}^{n+1}$中每一个使得$\partial D'=\partial D$的超曲面D'，有

$$V(D')\geqslant V(D).$$

因为局部地说，每一个超曲面是某函数$f:\mathscr{U}\to\boldsymbol{R}(\mathscr{U}\subset\boldsymbol{R}^n)$的图象，所以此引理可被下面引理所推出。

引理 10 设 $\mathscr{U}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个区域，它具有 C^∞ 边界 $\partial\mathscr{U}$，且设 f: $\bar{\mathscr{U}} \to \boldsymbol{R}$ 是一个 C^∞ 函数，使得 f 在 $\bar{\mathscr{U}} \times \boldsymbol{R}$ 中的图象 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个(具有边界的)极小超曲面．如果 N 是 $\bar{\mathscr{U}} \times \boldsymbol{R}$ 中一超曲面，使得 $\partial N = \partial M$，则

$$V(N) \geqslant V(M).$$

而且 $V(N) = V(M)$ 当且仅当 $N = M$．

证明 令 $\nu(x)$ 为 M 在 $(x, f(x))$ 处的向外的单位法向量．记 $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_{n+1})$，并把 ν 看成是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个向量，即

$$\nu = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}, -1\right),$$

其中 $W = \sqrt{1 + |\mathrm{d} f|^2}$．令 ω 为 $\bar{\mathscr{U}} \times \boldsymbol{R}$ 中由

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \nu_i \, \mathrm{d} x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d} x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^{n+1}$$

所定义的 n 次微分式．注意 $\mathrm{d}\omega = 0$，这是因为首先

$$\mathrm{d}\omega = \left(\sum_i \frac{\partial \nu_i}{\partial x^i}\right) \mathrm{d} x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x^{n+1}.$$

另一方面，向量场

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \quad i = 1, \cdots, n$$

形成了 M_y 的一组基，$\forall y \in M$，而且

$$\begin{aligned} A_\nu(X_i) &= \frac{\partial \nu}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \nu}{\partial x^{n+1}} \\ &= \frac{\partial \nu}{\partial x^i} \qquad (\text{因为 } \nu \text{ 与 } x^{n+1} \text{ 无关}) \\ &= \sum_j \frac{\partial \nu_j}{\partial x^i} X_j. \end{aligned}$$

因为 M 是极小，所以 $\operatorname{tr} A_\nu = 0$，于是得到

$$\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x^i} = 0.$$

因此 $d\omega = 0$。

设Σ是由M及N所围成的区域，于是 $\partial\Sigma = M - N$，因而从

$$\int_M \omega - \int_N \omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega = 0$$

就得出了

$$\int_M \omega = \int_N \omega.$$

再注意到$\omega|_M$是M的体积元，这显然是因ν的对偶微分式是

$$\tilde{\nu} = \sum_i \nu_i \, d x^i,$$

且 $\tilde{\nu} \wedge \omega = d x^1 \wedge \cdots \wedge d x^{n+1}$。另一方面，如用$\Omega$表示$N$的体积元，则

$$\int_N \omega = \int_N \langle \omega, \Omega \rangle \Omega,$$

于是

$$V(M) = \int_N \langle \omega, \Omega \rangle \Omega.$$

由 Schwarz 不等式，$|\langle \omega, \Omega \rangle| \leqslant |\omega| \cdot |\Omega| = 1$，于是

$$V(M) \leqslant \int_N \Omega = V(N).$$

如$M \neq N$，则存在 $p_1 \in M$ 及 $p_2 \in N$ 使得p_1，p_2投影到$\mathscr{U}$中相同的点，但M_{p_1}和N_{p_2}是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的非平行（在欧氏意义下）的超平面。令$\bar{\Omega}$为M的体积元，则由$\langle \omega(p_1), \bar{\Omega}(p_1) \rangle = 1$可知

$$|\langle \omega(p_2), \Omega(p_2) \rangle| < 1,$$

并可知此不等式在N的一个邻域上成立，于是

$$V(M) \leqslant \int_N \langle \omega, \Omega \rangle \Omega < \int_N \Omega = V(N).$$

证毕。

推论 11 如 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 的图象是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个极小超曲面，则它是极小化的，因而是稳定的。

§ 15 欧氏空间中的极小子流形

本节参考文献

[L2]，第一章，§§ 3，4，第三章，§§ 1，5.

[S8，IV].

我们希望对 $\boldsymbol{R}^n$ 中极小子流形的最初步的理论作简单的讨论。很长历史以来，这是一个很好发展着的研究课题，得到了大量的结果，除非是像大百科一类的厚书才能将这些结果完全包括进去。（见 J. C. Nietsche 所著的关于极小曲面的大厚书 [N1].）

设 M 是 C^∞ 流形，$f: M \to \boldsymbol{R}^n$ 是一个浸入，在 M 上配备着一个诱导度量。令 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上通常的整体坐标函数，且设 $f = (f^1, \cdots, f^n)$，这里 $f^i = x^i \circ f$，于是我们定义

$$\Delta f = (\Delta f^1, \cdots, \Delta f^n),$$

其中 Δ 是 M 在诱导度量下的 Laplace 算子，即 Δf 可看成是映射 $f: M \to \boldsymbol{R}^n$ 上的一个向量场：

$$(\Delta f)(p) = \left\{\sum_i (\Delta f^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}(f(p)), \quad \forall p \in M.$$

现在对每点 $p \in M$，定义 $\eta(p)$ 为 $f(M)$ 在 $f(p)$ 处的平均曲率向量，于是平均曲率向量场 η 是沿映射 f 上的一个向量场.

引理 1 $\Delta f = -\eta$.

证明 如通常那样，我们用 $\tilde{\mathrm{D}}$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的联络(即 $\tilde{\mathrm{D}}$ 正好是方向导数)，且用 D 表示 $f(M)$ 的联络. 我们只需在每点 $p \in M$ 处证实 $\Delta f = -\eta$. 设 W 为 M 中关于 p 的一个小邻域，使得 $f: W \to \boldsymbol{R}^n$ 为一个嵌入. 如把 $f(W)$ 与 W 视为恒同，则 W 上的向量场 Y 将恒同于

$$\mathrm{d}f(Y)=\sum_i (Yf^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=(Yf^1,\cdots,Yf^n)=Yf,$$

换言之,我们可恒同

$$Y=Yf,\quad \forall W \text{ 上向量场 } Y \tag{15.1}$$

现在令$\{X_i\}$为W中向量场的一组么正基,则

$$\begin{aligned}\Delta f&=\sum_i X_i(X_if)-(\mathrm{D}_{X_i}X_i)f\\&=\sum_i X_i(X_i)-\mathrm{D}_{X_i}X_i\qquad(\text{由 }(15.1))\\&=\sum_i \tilde{\mathrm{D}}_{X_i}X_i-\mathrm{D}_{X_i}X_i\\&=\sum_i -s(X_i,X_i)=-\eta,\end{aligned}$$

这里已利用了在$\boldsymbol{R}^n$中,$\tilde{\mathrm{D}}_XY$正好是

$$X(Y)=(XY^1,\cdots,XY^n).$$

证毕.

由此可得:

推论 2 浸入$f: M\to\boldsymbol{R}^n$为极小浸入的充要条件是每个f^i为**调和函数**,即

$$\Delta f^i=0,\quad \forall i.$$

我们已经知道,对极小浸入 $f: M\to\boldsymbol{R}^n$,配备着诱导度量的M必具有非正的 Ricci 曲率. 反之,给定一个非正 Ricci 曲率的黎曼流形M,对充分大的$\bar{n}$,是否存在着一个等距的极小浸入$f: M\to\boldsymbol{R}^{\bar{n}}$? 这一点现在还并不清楚. 但是如果我们去掉浸入是极小的要求,而只是去找等距嵌入f,则由著名的 Nash **嵌入定理**(每一个黎曼流形具有到某个欧氏空间中的等距嵌入,使得嵌入的像是闭的.)知道这总是可以做到的. 另一方面,我们已经看到,极小等距浸入$f: M\to\boldsymbol{R}^{\bar{n}}$必须具有调和的分量函数$(f^1,\cdots,f^{\bar{n}})$. 我们可以找出$M$到$\boldsymbol{R}^{\bar{n}}$中的一个(非等距的)嵌入,使得其分量关

于M上的度量为**调和函数**（见[GW1]）。注意，在所有这些讨论中，由§14的推论5知道，M必须是非紧的。而且在外围流形是$\boldsymbol{R}^n$的特殊情形下，利用上面的推论2及调和函数的最大值原理可以重新证明§14的推论5.

下面我们来考察$S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$的极小子流形。先一般地设$\widetilde{M}$为$\boldsymbol{R}^{n+1}$的一个嵌入子流形，且设$f$: $M \to \widetilde{M} \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$是一个等距浸入.记$\top$为$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的向量在$\widetilde{M}$的切平面上的投影. 令$f(M)$在$\widetilde{M}$中有平均曲率向量场$\tilde{\eta}$, $f(M)$在$\boldsymbol{R}^{n+1}$中有平均曲率向量场η.

命题 $\tilde{\eta} = \top\eta = \top(\Delta f)$.

证明 只需证明$\tilde{\eta} = \top\eta$。如前面一样，设$\{X_i\}$是M中的一个局部标架场，且设$\widetilde{\mathrm{D}}$为$\widetilde{M}$中的联络，D^0是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的联络（即D^0是方向导数），则

$$\eta = \sum_i \mathrm{D}^0_{X_i} X_i - \mathrm{D}_{X_i} X_i,$$

$$\tilde{\eta} = \sum_i \widetilde{\mathrm{D}}_{X_i} X_i - \mathrm{D}_{X_i} X_i.$$

但 $\top\mathrm{D}^0 = \widetilde{\mathrm{D}}$, $\top\mathrm{D} = \mathrm{D}$, 于是

$$\top\eta = \tilde{\eta}.$$

证毕.

现在特取$\widetilde{M} = S^n(r)$是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中半径为r的球面。设f: $M \to S^n(r)$为一个等距的**极小**浸入，则由$\tilde{\eta} = 0$得到

$$\top(\Delta f) = 0.$$

于是向量场Δf处处正交于$S^n(r)$。但是从对所有$p \in M$, $f(p) \in S^n(r)$能推出向量$v \perp S^n(r)_{f(p)}$的充要条件是存在某个$c \in \boldsymbol{R}$，使得$v = cf(p)$，于是对极小浸入f: $M \to S^n(r)$，存在一个函数λ: $M \to \boldsymbol{R}$满足

$$\Delta f = \lambda f. \tag{15.2}$$

现在从$|f| = r$知道$0 = \Delta|f|^2 = \Delta\langle f, f\rangle$，如选用在给定点$p \in M$处的法标架场$\{X_i\}$，那末我们在$p$处就有

$$0=\Delta\langle f,f\rangle=\sum_i X_iX_i\langle f,f\rangle$$

$$=2\sum_i\langle X_iX_if,f\rangle+\langle X_if,X_if\rangle$$

$$=2\langle\Delta f,f\rangle+2\sum_i\langle X_i,X_i\rangle\qquad(\text{由}(15.1))$$

$$=2(\lambda r^2+k),\qquad(\text{由}(15.2))$$

这里 $k=\dim M$. 于是 $\lambda=-k/r^2$,它是一个**常数**. 因此我们得到:

引理 3 如 f: $M\to S^n(r)\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 是 k 维黎曼流形 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中半径为 r 的球面中的一个等距极小浸入，则 f 的每一个分量 f^i 是 M 的 Laplace 算子 Δ 相应于**特征值** $-k/r^2$ 的**特征函数**. 反之，如对一个等距浸入 f: $M\to S^n(r)\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 有

$$\Delta f=-\frac{k}{r^2}f,$$

则

$$\tilde{\eta}=\top\left(\frac{k}{r^2}f\right)=0,$$

于是 f 是一个映到 $S^n(r)$ 中去的极小浸入.

这个引理建议我们去研究具有下述性质的等距浸入 f: $M\to\boldsymbol{R}^{n+1}$, 即 f 满足 $\Delta f=\lambda f$, 其中 λ: $M\to\boldsymbol{R}$ 是一个**处处非零的**函数. 答案是极其简单的. 如 η 是 $f(M)\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的平均曲率向量场,则 $-\eta=\Delta f=\lambda f$, 所以

$$\langle f,\mathrm{d}f\rangle=-\frac{1}{\lambda}\langle\eta,\mathrm{d}f\rangle,$$

这里 $\langle f,\mathrm{d}f\rangle$ 理解为 $\sum_i f_i\,\mathrm{d}f_i$. 于是对 M 上所有的向量场 X, 有

$$X\langle f,f\rangle=2\langle Xf,f\rangle=2\langle\mathrm{d}f(X),f\rangle=-\frac{2}{\lambda}\langle\mathrm{d}f(X),\eta\rangle=0,$$

这里利用了 η 与 $f(M)$ 正交的性质. 因此 $|f|^2$ 是一个常数，设为 r^2, 即 $f(M)\subset S^n(r)$. 于是由上述相同的计算表明 $\lambda=-k/r^2$,

其中 $k=\dim M$，这就证明了

定理 4 (Takahashi)　对于 k 维黎曼流形 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个等距浸入 $f: M\to \boldsymbol{R}^{n+1}$，下列是等价的：

(1) $f(M)$ 是 $S^n(r)$ 的一个极小浸入子流形；

(2) $\Delta f=-\dfrac{k}{r^2}f$；

(3) $\Delta f=\lambda f$，其中 $\lambda: M\to \boldsymbol{R}$ 为一个处处非零的函数.

这个定理给出了极小子流形与 Δ 的特征值、特征函数之间的一个事先未能预料的联系。由定理 4，对紧致黎曼流形 M 的 Laplace 算子的特征值、特征函数的透彻了解将导至 M 到 $S^n(r)$（对某个 r 及某个 n）中极小浸入的构造. 如我们已重复指出的那样，只有当 M 具有许多对称性时才有可能对这个性质作精确的计算. 在 $M=S^k\equiv S^k(1)$ 的特殊情形下，这个问题已被 E. Calabi 及 do Carmo-Wallach 所研究（见 do Carmo-Wallach 的文章 [CW]）. 这些工作表明：利用**球调和函数**（即 $S^k(1)$ 上 Δ 的特征函数）可作出许多 $S^k(1)$ 到 $S^n(r)$（对某个 r 及某个 n）中的极小等距浸入.

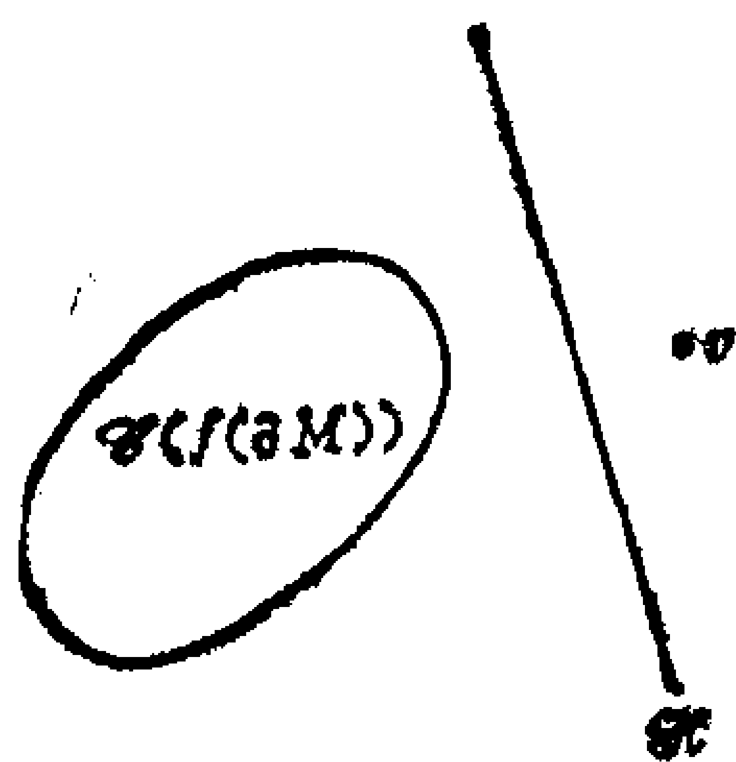


图 15.1

现在我们回到 $\boldsymbol{R}^n$ 中极小子流形的研究. 从推论 2 可得到下列对 $\boldsymbol{R}^n$ 中极小子流形有用的**凸性性质**. 设 $f: M\to \boldsymbol{R}^n$ 为一极小浸入. 我们已经知道每一个 $f^i\equiv x^i\circ f$ 是调和的. 如果有必要的话，通过对 M 的一个紧致子区域的限制，我们不妨假设 M 是一个具有边界 ∂M 的紧致流形. 我们可以断言：$f(M)$ 必须位于 $f(\partial M)$ 的**凸包**之中，这里所谓 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 S 的凸包 $\mathscr{C}(S)$ 是指包含 S 的最小闭凸集. 用反证法，如有 $v\in f(M)-\mathscr{C}(f(\partial M))$，因为 $\mathscr{C}(f(\partial M))$ 是凸的，所以存在一个超平面 $\mathscr{H}$，使得 v 及 $\mathscr{C}(f(\partial M))$ 位于 $\mathscr{H}$ 的不同的

开半空间之中(图 15.1)。通过 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中坐标的线性变换，我们不妨假设

$$\mathscr{H}=\{x_{n+1}=0\},$$

且

$$x_{n+1}(p)>0 \quad x_{n+1}|_{\varphi(f(\partial M))}<0.$$

但坐标的线性变换并不影响每个 $f^i\equiv x^i\circ f$ 的调和性质，由此知道

$$f^{n+1}\equiv x^{n+1}|_{f(M)}$$

是M上的一个调和函数，在 ∂M 上为负，在某内 p 点处为正，这就与调和函数的最大值原理矛盾.

注意：在某种情形下，我们可利用这个凸性结果去看出 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一些曲面不可能是极小的。

为了保持叙述的简单与直观性，现在我们集中研究 $\boldsymbol{R}^3$ 中的极小曲面。通过适当的修正后，下面某些讨论对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的极小曲面也是成立的。人们对极小曲面的研究之所以能如此深入的主要理由是，在每一个 2 维黎曼流形中可以导入一个最标准的**复结构**。类似地，在讨论 $\boldsymbol{R}^n$ 中极小曲面时要注意下列性质，即 $\boldsymbol{R}^n$ 中的定向 2-平面的 Grassmann 流形具有复结构。

设M是一个 2 维黎曼流形。已知对每一点 $x_0\in M$，存在 x_0 的一个邻域 $\mathscr{U}$ 及在 $\mathscr{U}$ 上的坐标函数 $\{u, v\}$，使得度量张量 g 取形式为

$$g=F(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2), \tag{15.3}$$

这里 F 是一个正的 C^∞ 函数，

$$\mathrm{d}u^2=\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u,\quad \mathrm{d}v^2=\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v,$$

其中$\otimes$表示**对称张量积**。称 $\{u, v\}$ 为**等温参数**。等温参数的存在性决不是显而易见的，尤其当我们还要计及其最佳可微性时更是如此。其证明可看 Bers 所著的 [B4]；对于计及其最佳可微性的证明，可参见 [CHW]。为了从较高的观点上讨论这个论题，它需要 Teichmüller **理论**，可看关于 Beltrami 方程的文章 [AB1]。

现在假设存在 x_0 的另一个邻域 $\mathscr{U}'$，在 $\mathscr{U}'$ 上也有等温坐标

$\{x, y\}$，且

$$g = F'(\mathrm{d}\,x^2 + \mathrm{d}\,y^2), \quad F' > 0.$$

我们总可假设

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} > 0 \tag{15.4}$$

(如有必要的话，可用 $-x$ 代替 x)。于是，在 $\mathscr{U} \cap \mathscr{U}'$ 上，

$$g = F'\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{d}\,u^2 + F'\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}\,v^2 + 2F'\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

与 (15.3) 比较后得到

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2, \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \tag{15.5}$$

我们将证明在 $\mathscr{U} \cap \mathscr{U}'$ 上有

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v} \quad 及 \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{15.6}$$

这只需逐点加以证明. 令 $p \in \mathscr{U} \cap \mathscr{U}'$，且设

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}(p), \quad \beta = \frac{\partial y}{\partial v}(p), \quad \gamma = \frac{\partial x}{\partial v}(p), \quad \delta = \frac{\partial y}{\partial u}(p).$$

由 (15.5) 的第一个方程知 $\alpha^2 + \delta^2 = \beta^2 + \gamma^2$. 因为用相同的常数乘每个 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 后 (15.5) 不改变，故不妨假设 $\alpha^2 + \delta^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 1$. 所以 $\delta = \pm\sqrt{1-\alpha^2}$，$\gamma = \pm\sqrt{1-\beta^2}$. 将它们代入 (15.5) 的第二个方程，且平方后，我们得到 $\alpha^2(1-\beta^2)=\beta^2(1-\alpha^2)$，所以 $\alpha^2 = \beta^2$. 于是也有 $\delta^2 = \gamma^2$. 现如 $\alpha = -\beta$，则由 (15.5) 的第二个方程 ($\alpha\gamma + \beta\delta = 0$) 推出 γ, δ 有相同的符号. 但 (15.4)

要求 $\alpha\beta - \gamma\delta > 0$，因而与 $\alpha\beta < 0$ 及 $\gamma\delta > 0$ 不相容，所以 $\alpha = \beta$，这就是 (15.6) 的第一个方程．类似地有

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}.$$

方程 (15.6) 正好是函数 $z = x + \sqrt{-1}\, y$ 关于坐标函数 u 和 v 的 Cauchy-Riemann 方程，这就允许我们在 M 中导入一个开覆盖 $\{\mathscr{U}_i\}$，使得

(1) 在每一个 $\mathscr{U}_i$ 上定义了一个复函数 $z = x + \sqrt{-1}\, y$，这里 $\{x, y\}$ 是度量张量 g 在邻域 $\mathscr{U}_i$ 中的等温坐标；

(2) 在 $\mathscr{U}_i$ 和 $\mathscr{U}_j$ 的交集上的两组等温坐标可用 (15.4) 中一个**正的** Jacobi 式相联系；

另外，从 (15.6) 可得出：覆盖 $\{\mathscr{U}_i\}$ 还必须具有一个附加性质，即

(3) 假设 $z = x + \sqrt{-1}\, y$ 及 $w = u + \sqrt{-1}\, v$ 分别是 $\mathscr{U}_i$ 及 $\mathscr{U}_j$ 上由 (1) 所述的复函数，则 z 是 w 的一个**全纯**函数，反之亦然．

一个 2 维流形如具有一个适合 (1)—(3) 的坐标邻域 $\{\mathscr{U}_i\}$ 的覆盖，则称它是一个**黎曼曲面**，或称为**一维复流形**．上述由 M 上的黎曼度量所确定的复结构称为**标准复结构**，在 $\mathscr{U}_i$ 上所定义的复函数 $z = x + \sqrt{-1}\, y$ 称为**复坐标函数**，并称每一个 $\mathscr{U}_i$ 为**复坐标邻域**．在 M 上赋有黎曼曲面结构后，我们就能定义一个函数 $f: M \to \mathbf{C}$ 为**全纯**，当且仅当在每个具有复函数 $z = x + \sqrt{-1}\, y$ 的 $\mathscr{U}_i$ 中，f 是 z 的一个全纯函数．从条件 (3) 知道，这个定义是合理的．

在 M 上有复的微积分，它是通常实微积分的一种形式推广．详细可见 [W10]．我们在这里仅简单地提及某些要点．在每个具有复坐标函数 z 的复坐标邻域 $\mathscr{U}_i$ 中，我们形式地定义如下的

两个复微分算子 $\frac{\partial}{\partial z}$ 及 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\ \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\ \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

这里 $z = x + \sqrt{-1}\ y$。注意:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{15.7}$$

设这时度量张量为

$$g = F(\mathrm{d}\,x^2 + \mathrm{d}\,y^2).$$

于是, § 2 的习题 5 中所给出的 g 的 Laplace 算子 Δ 的局部坐标表示式 (也可见 § 12 中的 (12.4) 及 (12.6)) 可被简化成

$$\Delta = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{15.8}$$

所以由 (15.7) 得到

$$\Delta = \frac{4}{F} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}. \tag{15.9}$$

我们可进一步形式地定义两个外导数:

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}\,z, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\,\bar{z},$$

其中

$$\mathrm{d}\,z \equiv \mathrm{d}\,x + \sqrt{-1}\ \mathrm{d}\,y, \quad \mathrm{d}\,\bar{z} \equiv \mathrm{d}\,x - \sqrt{-1}\ \mathrm{d}\,y.$$

虽然 $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 依赖于坐标函数 z, 但可验证 ∂ 和 $\bar{\partial}$ 是整体地定义在 M 上的算子, 且有

$$\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}\,y = \partial + \bar{\partial}. \tag{15.10}$$

相对于复坐标函数 z, 如果一个复的一次微分式 $\omega=f(z)\mathrm{d}z$ 中的 $f(z)$ 是 z 的一个全纯函数,则称 ω 为**全纯一次微分式或全纯微分**.又注意到,这个概念的定义是合理的,即如在 $\mathscr{U}_i$ 中的一次微分式等于 $f(z)\mathrm{d}z$, 且 $f(z)$ 为全纯,如果 $\mathscr{U}_j$ 具有复坐标函数 w, 则在 $\mathscr{U}_i\cap\mathscr{U}_j$ 中,此一次微分式等于

$$\left[f(z(w))\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right]\mathrm{d}w,$$

所以 $\mathrm{d}w$ 的系数也是全纯的.

利用复坐标函数 $z=x+\sqrt{-1}\ y$ 可把度量张量 $g=F(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$ 形式地改写成

$$g=F\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar{z}. \qquad (15.11)$$

现在回到极小浸入曲面 $f\colon M\to\boldsymbol{R}^3$, $f=(f^1,f^2,f^3)$ 的情形. 因为每个 f^i 在 M 中为调和,所以在每个具有复坐标函数 z 的复坐标邻域中有

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial f^i}{\partial z}\right)=0.$$

可以验证,对 M 上的一个复值函数 f_0, $\dfrac{\partial f_0}{\partial\bar{z}}=0$ 正好是

$$f_0=\mathrm{Re}\,f_0+\sqrt{-1}\ \mathrm{Im}\,f_0$$

的 Cauchy-Riemann 方程,即 f_0 为全纯函数. 故由上式得出, $\dfrac{\partial f^i}{\partial z}$ 是一个全纯函数,因此对每一个 i, ∂f^i 是一个在 M 上整体定义的全纯微分. 由 Cauchy 定理知道,从固定点 p_0 到任意点 $p\in M$ 的线积分 $\displaystyle\int_{p_0}^{p}\partial f^i$ 局部地是与路径无关的. 如果假设 M 是单连通的,则由 Cauchy 定理可进一步推出 $\displaystyle\int_{p_0}^{p}\partial f^i$ 是以 p 为自变量的一个**整体定义在 M 上的全纯函数**. 因为局部地

$$\partial f^i=\frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x}-\sqrt{-1}\ \frac{\partial f^i}{\partial y}\right)(\mathrm{d}x+\sqrt{-1}\ \mathrm{d}y)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x} \mathrm{d} x + \frac{\partial f^i}{\partial y} \mathrm{d} y\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(-\frac{\partial f^i}{\partial y} \mathrm{d} x + \frac{\partial f^i}{\partial x} \mathrm{d} y\right),$$

我们可看到 ∂f^i 的实部满足

$$\mathrm{Re}\, \partial f^i = \frac{1}{2} \mathrm{d} f.$$

于是当M为单连通时，对所有$p \in M$有

$$f^i(p) = 2\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \partial f^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15.12}$$

反之，如在单连通的M上给出了全纯微分 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$，我们总可以用

$$f^i(p) = 2\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \varphi_i \tag{15.13}$$

来定义M上的实值函数 f^1, f^2, f^3.

问题 在什么条件下，由 (15.13) 所给出的

$$f = (f^1, f^2, f^3)\colon\ M \to \boldsymbol{R}^3$$

是一个极小浸入？为了完整地回答这个问题，我们在提出这个问题时必须十分小心。我们从黎曼面M出发，一开始在M上还没有赋以度量。利用M上的全纯微分 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$，如在 (15.13) 中那样定义 $f^i, i = 1, 2, 3$，及 $f = (f^1, f^2, f^3)\colon\ M \to \boldsymbol{R}^3$，设 g_0 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的标准度量，再令 $g = f^* g_0$，则M上有了一个二阶对称张量

$$g = \sum_i \mathrm{d} f^i \mathrm{d} f^i. \tag{15.14}$$

假设这样造出的g是M上的一个黎曼度量（即$g > 0$），且假设相对于M上的复坐标函数 $z = x + \sqrt{-1}\, y$，g 的形状为 (15.11)，则 f 一定是配备着度量 g 的M到 $\boldsymbol{R}^3$ 中的极小等距浸入。这是因为如 f 不是浸入，则存在某个 $v \in M_p$，使得 $\mathrm{d} f(v) = 0$，则由

$$g(v, v) = \sum_i \mathrm{d} f^i(v) \mathrm{d} f^i(v) = 0,$$

因此与 $g>0$ 矛盾．进而，每个 f^i 必须是调和的，这是因为 $\int_{p_0}^{p} \varphi_i$ 为全纯，所以由 (15.13) 知

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f^i=0.$$

于是由 (15.8) 得到 $\Delta f^i=0$，再根据本节开始时的推论 2 就可知道 $f(M)$ 为极小．因此我们的问题应当重述如下：在什么条件下，由 (15.14) 所给出的二阶对称张量将成为形如 (15.11) 的黎曼度量？

为此，我们先计算 $d f^i$．在复坐标函数 $z=x+\sqrt{-1}\ y$ 下，有

$$\begin{aligned} \varphi_i &\equiv \tilde{\varphi}_i \, d z \equiv\left(\alpha_i+\sqrt{-1}\ \beta_i\right) d z \\ &=\left(\alpha_i \, d x-\beta_i \, d y\right)+\sqrt{-1}\left(\beta_i \, d x+\alpha_i \, d y\right), \end{aligned} \qquad (15.15)$$

于是由 φ_i 的全纯性可知 $\tilde{\varphi}_i$ 适合 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x}=\frac{\partial \beta_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial y}=-\frac{\partial \beta_i}{\partial x}. \qquad (15.16)$$

它正好是 Pfaffian 方程组 $d h^i=\left(\alpha_i \, d x-\beta_i \, d y\right)$ 的可积条件

$$d\left(\alpha_i \, d x-\beta_i \, d y\right)=0,$$

于是局部地存在一组 h^i，使得

$$d h^i=\left(\alpha_i \, d x-\beta_i \, d y\right),$$

所以

$$f^i=2 \int d h^i=2 h^i.$$

微分后得

$$d f^i=2 d h^i=2\left(\alpha_i \, d x-\beta_i \, d y\right).$$

于是

$$g=\sum_i d f^i d f^i=4 \sum_i\left(\alpha_i^2 \, d x^2+\beta_i^2 \, d y^2-2 \alpha_i \beta_i \, d x \, d y\right).$$

由此可知，$g>0$ 而且形如 (15.11) 的充要条件是

$$\begin{cases}\sum_i \alpha_i^2 - \sum_i \beta_i^2 > 0, \\ \sum_i \alpha_i\beta_i = 0.\end{cases}$$

利用(15.15)，它们即为

(1) $\sum_i \tilde{\varphi}_i^2 = 0$;

(2) $\sum_i |\tilde{\varphi}_i|^2 > 0$.

综上所述，如果我们在一个单连通的黎曼面M上有全纯微分

$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i \, \mathrm{d}z \quad (i = 1, 2, 3),$$

且它们满足上述(1)和(2)，令

$$f^i = 2\mathrm{Re}\int \varphi_i,$$

且设 $f = (f^1, f^2, f^3)$，则 $f(M)$ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个极小浸入子流形。

现在我们要在单连通的黎曼面M上找出所有适合(1)，(2)的全纯微分 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. 先排除 $\varphi_3 \equiv 0$ 及 $\varphi_1 \equiv \sqrt{-1}\,\varphi_2$ 的情形(这是不感兴趣的情况，因为这时有 $f^3 \equiv 0$，所以 $f(M)$ 位于一个平面上)。现在利用 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 可以在M上定义一个全纯微分 ω 及一个半纯函数 h 为

$$\omega = \varphi_1 - \sqrt{-1}\,\varphi_2, \quad h = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - \sqrt{-1}\,\varphi_2}$$

(这里，两个全纯微分的商 $\dfrac{f_1\,\mathrm{d}z}{f_2\,\mathrm{d}z}$ 定义为半纯函数 $\dfrac{f_1}{f_2}$，可以验证这个定义是合理的)。简单的计算表明

$$\begin{cases}\varphi_1 = \dfrac{1}{2}(1 - h^2)\omega, \\[2ex] \varphi_2 = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}(1 + h^2)\omega, \\[2ex] \varphi_3 = h\omega.\end{cases} \tag{15.17}$$

反之，设 h 是M上的任何半纯函数，ω 为M上任何全纯微分，使得 $h^2\omega$ 为一个全纯微分，即在 h 的每一个 k 阶极点处，ω 至少是 $2k$ 阶零点。我们用 (15.17) 去定义**全纯**微分 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$。这些 $\{\varphi_i\}$ 必适合 (1) 及 (2)，于是在M为单连通的情况下，用 $f=(f^1, f^2, f^3)$，其中 $f^i = 2\mathrm{Re}\int \varphi^i$ 就给出了一个极小浸入 $M \to \boldsymbol{R}^3$。称方程 (15.17) 为极小曲面M的 Weierstraβ **表示**。作为例子，令 $M=\boldsymbol{C}$，$h(z)=z$ 及 $\omega=\mathrm{d}z$，我们得到

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{2}(1-z^2)\,\mathrm{d}z, \\ \varphi_2 = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}(1+z^2)\,\mathrm{d}z, \\ \varphi_3 = z\,\mathrm{d}z. \end{cases}$$

所以相应的极小浸入 f: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{R}^3$ 为由 (15.13) 所给出：

$$\begin{cases} f^1(z) = \mathrm{Re}\left\{z - \dfrac{1}{3}z^3\right\}, \\ f^2(z) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{-1}\left(z + \dfrac{1}{3}z^3\right)\right\}, \\ f^3(z) = \mathrm{Re}\, z^2. \end{cases}$$

它被称为 Enneper **曲面**。如用 x 和 $y(z \equiv x + \sqrt{-1}\,y)$ 详尽地写出 Enneper 曲面的 f^1, f^2, f^3 将是一个十分复杂的，而且使人难以想像的曲面，但从 Weierstraβ 表示的观点来看，这是 $\boldsymbol{R}^3$ 中**最简单的**极小曲面。对于 Weierstraβ 表示的其它例子，见 [S8, IV]。

现在令 $f: M \to \boldsymbol{R}^3$ 是黎曼曲面M的一个极小浸入，使得在 $f(M)$ 上的诱导度量 g 诱导了M上的已给定的复结构。由前知

$$g = \sum_i \mathrm{d}f^i\,\mathrm{d}f^i.$$

设 $\Gamma: M \to S^2$ 为**高斯映射**，即对每一个 $p \in M$，$\Gamma(p)$ 为 $f(M)$

上所选定的单位法向量场 ν 在 $f(p)$ 处的值(因为任何黎曼面是可定向的,必存在这样的整体法向量场).如用 A: $M_p \to M_p$ 表示M在 p 处的第二基本形式(更精确地说,是 $f(M)$ 在 $f(p)$ 处的第二基本形式),则 $d\Gamma = A$. 因为 $\mathrm{tr}\, A = 0$,则相对于 A 的单位主方向,A 可表示成矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

于是 $d\Gamma$ 是**共形(保角)变换**. 但因为其行列式小于零,所以**定向相反**,由函数论中的一个初等的定理知道,相对于M及 S^2 的复结构,Γ 是**反全纯的**(即 $\bar{\Gamma}$ 是全纯的). 如我们固定在 p 及 $\Gamma(p)$ 周围的复坐标,则 ($\det d\Gamma$) 的零点与关于其坐标函数的 Jacobi 式 $\mathscr{J}\Gamma$ 的零点是一致的. 由于 $\mathscr{J}\Gamma$ 为全纯,所以或者 $\mathscr{J}\Gamma = 0$,或者其零点为离散. 因而,($\det d\Gamma$) 或恒为零,或有离散的零点. 因为 $\det d\Gamma$ 等于M的高斯曲率 K (Egregrium 定理),于是我们知道,或者 $K \equiv 0$ 或者K仅在一个离散点集上为零. 当 $K \equiv 0$ 时,因为 $K = -\lambda^2$ (λ, $-\lambda$ 是M的主曲率),所以 $\lambda = 0$. 于是 $A \equiv 0$, 即 $f(M)$ 位于某一个平面中. 于是有

定理 5 对极小浸入曲面 $M \subset \boldsymbol{R}^3$, M 或者位于一个平面之中,或者它的高斯曲率仅在一个离散集合上为零.

再简单地提一下:

Osserman **定理** 如M是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的完备的极小浸入曲面,且M不是平面,则它的高斯映射在 S^2 中的像一定是稠密的.

我们现在来看这个定理的直观意义,因为 $\bar{\Gamma}$: $M \to S^2$ 为全纯,如果把 S^2 与 $\boldsymbol{C}^1 \cup \{\infty\}$ 恒同,则立刻可以验证 $\bar{\Gamma}$: $M \to \boldsymbol{C}^1$ 是一个亚纯函数,因此很自然希望对于这个亚纯函数,古典的 Picard **定理**也可以成立,即如果 $S^2 - \Gamma(M)$ 多过两点,则希望 Γ 为一个常数映射. 这个**猜想**虽然好像太大胆,但是在这个世纪的初期,Bernstein 已经证明了下面的有名定理:

Bernstein **定理** 如果 $\boldsymbol{R}^3$ 中的一个极小曲面是定义域为整个 $\boldsymbol{R}^2$ 的某函数的图象，则它必为平面。

如果用几何术语来表达的话，那么这个定理说明一个 $\boldsymbol{R}^3$ 上完备的极小曲面，若其高斯映射是在一个开半球内，则该曲面定为平面。这个事实与上面的猜想一致。在 1950 年 Nirenberg 给出了一个较弱的猜想，即上述的 Osserman 定理很可能成立。在 1959 年 Osserman 证明了这个猜想。Osserman 的证明可在 Lawson 的书 [L2] 内找到。Osserman 后来又指出在这方面**最合理的猜想**应为：如果 $S^2-\Gamma(M)$ 多过四点，则 M 一定是平面。至于 $S^2-\Gamma(M)$ 刚好为一点、两点、三点或四点，即 M 的高斯映射刚好遗漏一点、两点、三点或四点的例子已被 Voss 找到，见 [V]。可参阅 [O] 中的定理 8.3。

最近 Xavier **证明**了如果 $S^2-\Gamma(M)$ 多过六点，则 M 必为平面，见 [X]。

1987 年 H. Fujimoto 证出了 Osserman 指出的**最合理的猜想**，即他证出下列定理：

定理 设 M 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中完备极小曲面，它不是平面，那么 $S^2-\Gamma(M)$ 至多 4 个点。

过去六十年来，上述的 Bernstein 定理对偏微分方程和微分几何都有重大的影响。现在我们只指出最近 Fischer-Colbrie 和 Schoen 的一个非常好的定理（见 [FS]），他们把 3 维非负数量曲率的黎曼流形中所有稳定、定向、完备的极小曲面加以完全分类。由这个分类立刻可看到在 3 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中这种曲面一定是平面。由 § 14 的推论 11 得知，这种曲面包括了定义域为整个 $\boldsymbol{R}^2$ 的极小图象，故为 Bernstein 定理的推广。（这个特例也被 do Carmo-Peng [CP] 所证明。后者发表的日期较早，但事实上是比 Fischer-Colbrie 和 Schoen 的文章较迟才写完的。）

§ 16 几乎平坦的流形

本节参考文献

[BK], [G6], [GW4], [MR1], [MR2], [MSY], [R4], [W8].

这一节将对最近一个黎曼几何的重要发展作一个简略的报导。在下面的讨论中，我们将会提到一些本书范围以外的概念和定理。因为时间和篇幅的关系，我们将不会给出这些概念或定理的详细讨论，更谈不到给出下列任何一个定理的证明。

在第八节结束之前，我们讨论了球面定理。这个定理的直观意义就是说，如果一个黎曼流形的曲率和球面的曲率"相似"，则这个流形的拓扑结构也和球面"相似"。现在我们来看看，如果用"欧氏空间"来取代球面的话，是否也有对应的定理。我们已知有下面两个事实：设M为完备的黎曼流形，

(1) 若M平坦(即M的截面曲率 $K\equiv 0$)，并且单连通，则M与$\boldsymbol{R}^n$等距；

(2) 若M平坦且紧致，则M的万有覆盖空间$\widetilde{M}$与$\boldsymbol{R}^n$等距。

上面(1)和(2)的差别在于非紧和紧的假设。我们故意将这两个情形区分开来，是因为在下面的讨论中有很大的差距。现在用球面定理的想法，希望能够证明，若一个M是非紧或紧，而且"几乎平坦"，则M或$\widetilde{M}$与$\boldsymbol{R}^n$"几乎等距"。这里的"几乎平坦"和"几乎等距"，当然是有待澄清的概念。实际上在推广(1)和(2)时，有一半困难就在于把这些概念说清楚。

说清"几乎平坦"确实是有困难的。当你企图推广(2)时，大

概会以为"几乎平坦"就表明K的绝对值是足够小吧？现在请看一个例子．如果M紧致，具有黎曼度量g，其截面曲率是K，于是对于常数$A>0$，易见Ag依然是M的黎曼度量，它的曲率却是$\frac{1}{A}K$．因此当取A足够大时，M便该有"几乎平坦"的度量了．于是任何紧的流形M都可以赋予这种试想的"几乎平坦"度量，所以关于M的性质也就什么也说不出了．至于如何去试想"几乎等距"，也就更难下手．

数学上处理流形通常是先解决紧致的情形，然后再去做更为困难的非紧情形．这里的情况却不大相同．虽然事实上紧致情形是先被解决的（[G6]，1978），但是非紧情况倒是易做得多（[GW4]，1982）．所以我们先讨论非紧的情况，即上面（1）的推广．"几乎平坦"此时应理解为截面曲率K在∞点附近"充分平坦"这一性质．精确说法如下：

定理（Greene-Wu） 设完备黎曼流形M有**极点**$x\in M$（即$\exp_x: M_x\to M$是C^∞同胚），$\dim M=n\geqslant 3$，$K\leqslant 0$或$K\geqslant 0$，并且有

$$\liminf_{s\to\infty} s^2K(s)=0,$$

则M与$\boldsymbol{R}^n$等距．

这里$K(s)$的定义为：考虑所有$y\in M$使得$d(x,y)=s$，又考虑所有M_y内所有2维平面P的曲率$K(P)$，则

$$K(s)=\begin{cases}\max\{K(P)\}, & 若\ K\geqslant 0;\\ \min\{K(P)\}, & 若\ K\leqslant 0.\end{cases}$$

这个定理的背景是相当复杂的，可看 Greene-Wu 的文章 [GW4] 内的详细说明．但是至少应该在这里提到，这个定理的 Kähler 特殊情况是先被 [MSY] 在 1981 证明的．

现在对定理中的条件作一个说明．考虑单位球上有下列两个完备黎曼度量：

$$ds_1^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1-(x_1^2+\cdots+x_n^2))^2},$$

$$ds_2^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{(1-(x_1^2+\cdots+x_n^2))^3}.$$

它们的截面曲率分别记为 K_1, K_2。不难验证

$$K_1 \equiv -4, \quad K_2(s) \sim \frac{A}{s^2}, \quad 当\ s \to \infty,$$

其中 $A > 0$。特别有

$$\lim_{s\to\infty} s^2K_1(s) = +\infty, \quad \lim_{s\to\infty} s^2K_2(s) = A > 0.$$

可见定理中 $\lim\limits_{s\to\infty} sK(s) = 0$ 的假说是最优的. 至于 $\dim M \geqslant 3$ 的假设的必要性，可从下列事实看出来（[GW3], Proposition 4.2, 第 58 页）：在 $\boldsymbol{R}^2$ 上存在完备、有极点的黎曼度量，使得 K 在任意给定的紧集上为负，而在紧集之外为零. 至于为什么 $\dim M \geqslant 3$ 这个条件可以使定理成立，是可以从如下的观点来理解的：当曲率已知时，黎曼度量满足的微分方程是**过定的**(即独立方程比未知函数为多)，因此对曲率加限制后，对黎曼度量本身就会有"过分"的限制，迫使它与 $\boldsymbol{R}^n$ 上的平坦度量相等. 这个直观的想法，如果能够用严格的数学技巧来表达，就会是这个定理的一个很漂亮的证明.

最后要补充一点，上述定理在 $\dim M = 4$ 或 8 时，还要稍加一点条件. 因为 S^3 和 S^7 (单位球面)是可平行化的. 请阅 [GW4]. 但是我们相信这只是因为目前这个证明还不是充分完善的，而不是因为真有这个需要.

现在对 $K \leqslant 0$ 的情形，**简述定理的证明**. M 中对应 x (极点)，r 为半径的测地球面记做 $\mathscr{S}_r$，我们有高斯方程（见 § 13，推论 7）

$$K_M(\Pi) = K_{\mathscr{S}_r}(\Pi) - \det(\sigma | \Pi).$$

其中Π是切于$\mathscr{S}_r$的平面，σ是第二基本形式。因此有

$$r^2K_{\mathscr{S}_r}(\Pi) = r^2K_M(\Pi) + r^2\det(\sigma|_\Pi).$$

当 $M = \boldsymbol{R}^n$ 时，将σ，$\mathscr{S}_r$分别记为$\bar{\sigma}$，$\bar{\mathscr{S}}_r$. 直接计算得

$$\det\bar{\sigma} = \frac{1}{r^2}, \qquad K_{\bar{\mathscr{S}}_r}(\Pi) = \frac{1}{r^2}.$$

由于 $K_M \leqslant 0$，可以用一般的比较定理办法，证明 $\det\sigma \geqslant \det\bar{\sigma}$. 故

$$K_{\mathscr{S}_r}(\Pi)/K_{\bar{\mathscr{S}}_r}(\Pi) = r^2K_{\mathscr{S}_r}(\Pi) \geqslant r^2K_M(\Pi) + r^2\det(\bar{\sigma}|_\Pi)$$
$$= r^2K_M(\Pi) + 1.$$

利用 $\liminf\limits_{r\to 0} r^2K_M(r) = 0$，得

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{K_{\mathscr{S}_r}(\Pi)}{K_{\bar{\mathscr{S}}_r}(\Pi)} \geqslant 1.$$

假若这个 $\liminf > 1$，则有无限大的 r 使得

$$K_{\mathscr{S}_r}(\Pi) > (1+\varepsilon)K_{\bar{\mathscr{S}}_r}(\Pi),$$

其中$\varepsilon > 0$，ε不依赖于r. 由 § 11 的定理 6 (Bishop-Gromov 定理)，可导出 $\mathrm{Vol}(\mathscr{S}_r) < \mathrm{Vol}(\bar{\mathscr{S}}_r)$，这与由$K_M \leqslant 0$所导出来的体积不等式 $\mathrm{Vol}(\mathscr{S}_r) \geqslant \mathrm{Vol}(\bar{\mathscr{S}}_r)$，$\forall r$ 有矛盾。因此

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{K_{\mathscr{S}_r}(\Pi)}{K_{\bar{\mathscr{S}}_r}(\Pi)} = 1,$$

蕴涵

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\mathrm{Vol}(\mathscr{S}_r)}{\mathrm{Vol}(\bar{\mathscr{S}}_r)} = 1.$$

不难用这个极限加上$K \leqslant 0$的假设证明M必须与$\boldsymbol{R}^n$等距。

在$K_M \geqslant 0$时证明这个定理就比较困难。其中一个办法需要用广义的 Gauss-Bonnet 定理. 到目前为止，似乎这是广义 Gauss-Bonnet 定理的唯一应用。

现在讨论这节的主题，就是紧的几乎平坦黎曼流形的情形. 这方面的突破是 M. Gromov 的工作 [G6]，但是 Buser-Karcher

和 Ruh 的贡献也很重要(见 [BK], [R4])。

定义 紧黎曼流形称为是 ε 平坦的 ($\varepsilon > 0$), 如果

$$|K|d(M)^2 \leqslant \varepsilon,$$

其中 $d(M)$ 是M的直径。

注意: ε 平坦的概念是与黎曼度量 g 的标度改变无关的. 即是说, g 是 ε 平坦 $\Leftrightarrow$ Ag 是 ε 平坦 (A 为任意正常数).

ε 平坦是一个远比平坦弱得多的概念. 下面的例子说明一个曲率恒等于一的紧空间形式也可以是 0.155 平坦的. 设G是 S^3 上的 20 面体等距变换群. 令 M 为商空间 $G\backslash S^3$, 故有 $K_M = 1$, $d(M) = \pi/8$。从而

$$|K|d(M)^2 = \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \sim 0.155.$$

事实上, $\forall \varepsilon > 0$, 存在紧、非平坦、而 ε 平坦的黎曼流形: 设G为所有 $n \times n$ 阶对角元素为 1 的上三角阵组成的群, 它的李代数 $\mathfrak{G}$ 是

$$\mathfrak{G} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} : a_{ij} \in \boldsymbol{R},\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\right\}.$$

G 是一个**幂零李群**,即是说如果定义 $\mathfrak{G}$ 内的子李代数

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G}_k = [\mathfrak{G}_{k-1}, \mathfrak{G}],$$

则有一个 $m \in \boldsymbol{Z}^+$ 使得 $\mathfrak{G}_m = 0$ (事实上对于这个 $\mathfrak{G}$, 可取 $m = n - 1$)。 现固定一个 $q \in \boldsymbol{R}$, $0 < q < 1$, 定义 $\mathfrak{G}$ 中一个内积 $\langle , \rangle_q$:

$$\langle A, B\rangle_q = \sum_{i<j} a_{ij}b_{ij}q^{j-i}, \quad \forall A, B \in \mathfrak{G}.$$

用左平移扩张为 G 上的黎曼度量. 不难直接证明

$$|K_G|_q \leqslant 24(n-2)^2.$$

请注意右面的上界不依赖 q。现令

$$\Gamma = \{A \in G:\ a_{ij} \in \boldsymbol{Z}, \forall_{i,j}\}.$$

则商空间 $M=\Gamma\backslash G$ 是紧致的. 如果q是充分小，则黎曼流形 $(M,\langle\ ,\ \rangle_q)$ 的直径也是充分小. 所以给出 $\varepsilon>0$，存在q使得 $|K_G|_q d_q^2(M)<\varepsilon$，即$M$为$\varepsilon$平坦. M 不可能平坦，因为从下述的 Bieberbach 定理,可以推出：M平坦$\Rightarrow G$是交换群. 而这是不可能的.

明白了上述的例子，就可知 (1) 的推广不可能太简单. 即是说,如M是紧,ε平坦的流形,则其万有覆盖空间$\widetilde{M}$可能是一个幂零李群,而不一定是常见的交换李群 $\boldsymbol{R}^n$. 但是(互不同构的)幂零李群的集合是不可数的,所以即使预先知道$\widetilde{M}$是一个幂零李群的话，还须要直接把它构造出来才能证明它的存在性. 这表明为什么下面的定理是如此出色的. 先定义：如果G是一个离散群，则 $\{G_i\}$ 是下列的一个子群序列:

$$G_0=G,\quad G_k=\{aba^{-1}b^{-1}:\ a\in G,\ b\in G_{k-1}\}.$$

称G为**幂零群**，如果有 $k\in\boldsymbol{Z}^+$使得 $G_k=\{1\}$. (可验证上面幂零李群的定义与这个是一致的.)称G为**无挠的**,若 $\forall a\in G$, $\forall k\in\boldsymbol{Z}$, $a^k=1$,则蕴涵 $k=0$.

定理 ([G6], [BK]) 设M是n维紧致ε平坦的流形，其中

$$\varepsilon=\exp(-\exp(\exp n^2)),$$

则

(1) 基本群 $\pi_1(M)$ 内有一个无挠、幂零、正规子群Γ;

(2) $\pi_1(M)/\Gamma$ 为一个有限群,且与正交群 $O(n)$ 内一个离散子群同构;

(3) 存在一个n维、单连通、幂零李群N,使得Γ成N内的离散子群;

(4) 商空间$\Gamma\backslash N$为M的一个有限覆盖(其覆盖变换群当然为 $\pi_1(M)/\Gamma$).

这个定理和证明是 Gromov 在 1978 年用 11 页简略地写出的(见 [G6]). 后来 Buser-Karcher 跟随 Gromov 的想法，用了

140 页来详细证明这个定理(见 [BK])。但是还是很难读,因为这个定理本身的深度实在太大．定理中

$$\varepsilon = \exp(-\exp(\exp n^2))$$

这个常数自然是小得有点滑稽．一般的猜想是：ε 大概只须 $\exp(-n^2)$ 左右就够了．(ε 不可能太大，因为上面我们看到一个 3 维 0.155 平坦的例子，其万有覆盖空间为 S^3；而 S^3 绝对不是一个幂零李群．)另一方面大家一定对 (4) 的结论不太满意：似乎最理想的结论，应该是 $\pi_1(M)\subset N$ 而且 $\pi_1(M)\backslash N$ 与 M 微分同胚．事实上，这点即使在平坦的情况下也办不到的：考虑 Klein 瓶 M_0，将 M_0 表示成 $G\backslash\boldsymbol{R}^2$，即 G 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的等距变换群，其生成元为

$$(x, y) \overset{g_1}{\longmapsto} (x, y+1),$$

$$(x, y) \overset{g_2}{\longmapsto} \left(x+\frac{1}{2}, -y\right).$$

所以 M_0 是这个作用的商空间．自然 G 就是 M_0 的基本群，而 $\boldsymbol{R}^2$ 是 M_0 的万有覆盖空间．但是不可能将 G 实现成 $\boldsymbol{R}^2$ 的子群，因为 $\boldsymbol{R}^2$ 的子群作用于 $\boldsymbol{R}^2$ 上都是平移，而 G 内的元 g_2 不是平移．另一方面，Klein 瓶这个例子可以用来具体的说明上面这个所谓**几乎平坦定理**的所有断言 (1) 至 (4)．因为

$$g_2^2(x, y) = (x+1, y),$$

故由 $\{g_1, g_2^2\}$ 所生成的子群 $\Gamma\subset G$ 是与 $\boldsymbol{R}^2$ 内的子群 $\boldsymbol{Z}^2$ 同构．现将 Γ 与 $\boldsymbol{Z}^2$ 等同，有 $\Gamma\subset\boldsymbol{R}^2$．可见 $G/\Gamma\cong\boldsymbol{Z}^2$，而且 $\Gamma\backslash\boldsymbol{R}^2$ 是 2 维环面，$\Gamma\backslash\boldsymbol{R}^2\to M_0$ 是一个 2 重覆盖．最后注意 Γ 是无挠的交换群，所以更是幂零群．

Klein 瓶的例子，说明几乎平坦定理内关于 Γ 的断言，即 $\pi_1(M)$ 内有一个有限指标的子群 Γ 使得 Γ 是 M 的万有覆盖空间 N 的子群，事实上是最优的．一般而言，$\pi_1(M)$ 本身不会是 N 的子群．另一方面可以看到 Klein 瓶 M_0 的基本群 G 虽然不是 $\boldsymbol{R}^2$

的子群，但是至少G是$\boldsymbol{R}^2$的等距变换群．对比之下，几乎平坦定理就没有做到这一点，即是说没有证明N具有一个左不变的黎曼度量g使得$\pi_1(M)$实现成为(N, g)的等距变换群．最近 Ruh 改善了这点(见 [R4])，他将(3)和(4)加强如下：

(3′) 存在一个n维的单连通幂零李群N，$N \supset \Gamma$，且N具有一个左不变的黎曼度量g和一个与g**相容的联络**D（即是说D的平移都是对应于g的线性等距映射），D有平行的挠率张量和恒等于零的曲率张量，使得$\pi_1(M)$在N上的作用保持D和g。同时Γ可以刻划为$\pi_1(M)$内所有平移的元，即是说

$$\Gamma = \{a \in \pi_1(M):\ \forall x \in N,\ \mathrm{d}\,a:\ N_x \to N_{a(x)}$$

是对应于D的平行移动}.

（对应于D的平移不依赖于连接两点的曲线，因为D的曲率为零而且N是单连通．）

(4′) M与商空间$\pi_1(M) \backslash N$微分同胚。

经过 Ruh 这样改善之后，几乎平坦定理就成为下面要讨论的 Bieberbach 定理的直接推广．[R4]的证明比[G6]较简单．他除了用上[G6]的一个主要想法之外，还用上[MR1]与[MR2]两篇文章的一个基本偏微方程的技巧． 这个技巧其实用途很广，可惜因为时间所限，我们不能在这里讨论．下面只能够很粗的介绍一下[G6]的想法．很容易看到 Gromov 是从 Bieberbach 定理中得到启发的，因此我们先说一说 Bieberbach 定理(参阅[W8]，第三章)．首先给出一些定义．设M为紧的平坦黎曼流形，$x \in M$．由 Cartan-Hadamard 定理，知

$$\exp:\ M_x \to M$$

为覆盖映射．故$\pi_1(M, x)$作用于M_x上． 对于M中以x为起、终点的**回归测地线**(不要求在x处光滑) $\gamma:\ [0, 1] \to M$，对$v \in M_x$，令$A(\gamma) \cdot v$为v沿着γ平移到$\gamma(1) = x$点的向量。于是有$\mathscr{A}(\gamma):\ M_x \to M_x$，使得

$$\mathscr{M}(\gamma)(v)=A(\gamma)\cdot v+\dot{\gamma}(1).$$

称 $\mathscr{M}(\gamma)$ 为对应 γ 的**仿射平移**,其中 $A(\gamma)\cdot v$ 称为**转动部分**, $\dot{\gamma}(1)$ 称为**平移部分**. 若 $A(\gamma)$ 为单位阵,则称 $\mathscr{M}(\gamma)$ 为**平移**. 可以验证 $\mathscr{M}(\gamma)$ 就是 γ 的同伦类 $[\gamma]$ ($[\gamma]\in\pi_1(M,x)$) 在万有覆盖空间 M_x 上的作用.

Bieberbach **定理** 设 M 是 n 维紧致平坦的黎曼流形, 其基本群 $\pi_1(M,x)$ 仿射平移作用于 M_x 上,则

(1) M 与商空间 $\pi_1(M,x)\backslash M_x$ 等距;

(2) 命 Γ 为 $\pi_1(M,x)$ 中所有平移组成的集合, 则 Γ 为 $\pi_1(M,x)$ 内的 n 秩自由交换的正规子群(即是说, Γ 与 $\mathbf{Z}^n$ 同构, 且 Γ 是 $\pi_1(M,x)$ 的正规子群), 商群 $\pi_1(M,x)/\Gamma$ 是一个由 $\pi_1(M,x)$ 作用 M_x 中转动部分组成的有限群;

(3) $\Gamma\backslash M_x$ 是 n 维环面,并且是 M 的有限覆盖,其覆盖变换群为 $\pi_1(M,x)/\Gamma$.

Bieberbach 定理中 Γ 占着异乎寻常的地位. 它是 M_x 中的格、从而决定 M_x. 在证明几乎平坦定理时, 也是先找到这个 Γ, 然后用 Γ 来构造 N. 在平坦的情况下, 如果 M 是环面, 则每个 $\mathscr{M}(\gamma)$ 总是平移, 所以 $\Gamma=\pi_1(M,x)$. 在几乎平坦的情况之下, 情形就复杂了. $\mathscr{M}(\gamma)$ 的平移部分通常和 γ 的同伦类 $[\gamma]$ 中具体回归测地线的选取有关. 所以 $\pi_1(M)$ 不可能仿射平移作用于 M_x. 尽管如此,我们还是希望对于几乎平坦的 M, 可以使 $\pi_1(M,x)$ "几乎仿射平移"作用于 M_x, 然后从"几乎平移"部分来挑出这个子群 Γ. 这个近乎天真的想法的精确说明, 就是 [G6] 和 [BK] 中最复杂的部分. 其中重要的一步来自 M 为平坦的特例. 若 M 平坦, 则 $\pi_1(M)$ 中的仿射平移 $v\longmapsto A\cdot v+a$ 具有一个特性: A 要么是单位阵,要么它的最大转角 $\geqslant 1/2$. 换句话说,一个仿射平移是平移的充要条件是它的转动部分的转角 $<1/2$. 利用这个观察,在几乎平坦的情况下可以证明, 当 γ 不太长时, 只要 $A(\gamma)$ 的

转角都小于 0.48，则它的所有转角其实小于 1/7，因此定义 Γ 为所有 $\mathscr{M}(\gamma)$ 所生成的集合，其中 γ 不太长，而且转角都小于 0.48. 然后考察 Γ 中的乘法和换位子，以确定 Γ 是 $\pi_1(M, x)$ 中的幂零无挠正规子群. 再用 Malcev **定理**，可证 Γ 中的乘法是"多项式性的"，从而可以将 Γ 嵌入到一个 n 维单连通幂零李群 N 中. 到了这地步才将 N 构造出来！最后还要证明这个 N 真是 M 的万有覆盖空间，这里要用到所谓"取重心"的技巧. 详细情形，只好请你们读 [BK].

§ 17　一些未解决的问题

本节参考文献

[Y].

从第一节开始到这里，大家已经走了相当长的一段路．现在和大家讨论几个待解的问题，作为这本书的结束．希望通过这些问题让大家知道，一方面固然我们所讨论过的题目只是几何学内的一鳞半爪，但是已经足以了解目前几何研究的几个方向．另一方面也说明这个结束其实就是一个新的开始，大家心里现在应该有准备向几何学的前沿走第二步了．下面所讨论的八个待解的问题，都是一般几何学家所熟悉的，同时也是 [Y] 的 120 个待解问题中的一小部分．

（一）曲率>0 的黎曼流形的拓扑结构

参考文献：[B5]，[GM]，[CG2]，[GW2]，[B1]，[W1]，[AW]，[B3]，[E3]，[G8]，[BG]，[M3]，[SY5]．

在第五节中我们已经提过，如果M是一个非紧、完备而且有正(截面)曲率的黎曼流形，则M与欧氏空间同胚(见 [GM]．他们的证明不能照顾 3 维和 4 维的情况，所以需要用 [CG2] 来补上．Greene-Wu 在 [GW2] 中有一个简单的证明，而且定理较强)．所以我们现在把注意力集中在紧的情况上．为了避免不必要的技术性的麻烦，在下面的讨论中，我们再加上单连通的假设．

从对称空间的理论中(见 [B5] 和 [H3])，我们知道所谓一秩的紧致对称空间都具有 $K>0$ (用K来表示截面曲率)的黎曼度量．这些空间不难列出：球面 S^n，实射影空间 $P_n\boldsymbol{R}$，复射影空间

P_nC，四元素射影空间 P_nH 和 Cayley 平面．(P_nR 自然不是单连通的，所以违背了上面的约定．这 是唯一的例外．)在 1961 年以前，人们不知道是否所有 $K>0$ 的单连通紧致黎曼流形一定与一个一秩的紧致对称空间同胚．自然这个疑问完全出于无知，因为那时完全没有例子．1961 年 Berger 把所有正规的齐性黎曼流形分类（见 [B1]），发现还有两个齐性、单连通、紧致的黎曼流形有 $K>0$，一个是 7 维，另一个是 13 维．1972 年 Wallach 又发现在非正规的黎曼齐性流形中还有三个例子，（见 [W1]）．它们的维数都是偶数：6，12，24．有了这些例子之后，有些人仍然一厢情愿，希望在每一个维数内所有 $K>0$ 的紧致、单连通黎曼流形，它们的拓扑型是有限的．这个梦想在 1975 年被 Aloff-Wallach 所打破(见 [AW])．他们在 7 维内构造了一列互不同构，而又有 $K>0$ 的单连通、紧致的齐性黎曼流形．（一年之后，Bérard Bergery 总结了上述 Berger，Wallach 和 Aloff-Wallach 等人的工作，在 [B3] 中证明除了他们这些例子外，再没有其他的紧致、单连通、齐性和具有 $K>0$ 的黎曼流形．)最近，Eschenberg 更进一步构造了一列 7 维的 $K>0$ 的例子，并证明了这些流形不可能和任何齐性、$K>0$ 的流形同胚(见 [E3])．所以总括这些人的工作，我们可以说具有 $K>0$ 的紧致、单连通黎曼流形是"相当多的"．但是目前还没有办法回答一个最简单的问题：这些 $K>0$ 的流形到底有什么共同的拓扑性质?

为了说明我们在这方面的无知是如何使人吃惊的，可以说得更具体一点：$S^2\times S^2$ 是否容有一个 $K>0$ 的黎曼度量？这个由 H. Hopf 首先提出来的问题，到目前还没有解答．（这个问题的直观想法是很简单的：由 Gauss-Bonnet 定理知 $S^1\times S^1$ 不能容有一个 $K>0$ 的黎曼度量，又由 [H1] 可知 $S^1\times S^2$ 不能容有同样的度量，所以下一步自然要问 $S^2\times S^2$．）更进一步，我们可以问：如果 M，N 都是单连通的紧致微分流形，$M\times N$ 是否容许一个

$K > 0$ 的度量?

从 Hodge 理论可以看出,如果M是一个紧致的、$K > 0$ 的流形,则它的 Betti 数 $b_k(M)$ 似乎"不可能太大". 但是要把这句话变成精确的数学,直到最近才开始有些进展. Gromov 在 1981 年证明了一个突破性的定理(见 [G8]): $\forall n \in \mathbf{Z}^+$, 存在一个常数 $c(n)$ 只依赖于 n, 使得所有 n 维紧致、$K \geqslant 0$ 的黎曼流形 M 都满足: $\sum_k b_k(M) \leqslant c(n)$. 可是从我们的观点来看, 这个定理还不能解答我们的问题.因为第一,这个 $c(n)$ 目前是一个很大的数字,第二,这个证明不能判别 $K > 0$ 和 $K \geqslant 0$ 的情况,也就是说,如果假设 $K > 0$ 的话, 这个上界 $c(n)$ 也没法改善. 一般的猜想是:如果只假设 $K \geqslant 0$, 则最佳上界 $c(n)$ 应该是 2^n (n 维环面满足这个上界). 但是如果将假设加强成为 $K > 0$, 目前还没有人敢猜想最佳的上界 $c(n)$ 应该是什么. 比方说, 是否一定有 $b_2(M) \leqslant 1$ 呢? 如果是对的,就立刻可见 $S^2 \times S^2$ 不容许一个 $K > 0$ 的度量. 在目前所有的例子中, 这个 $b_2(M)$ 的不等式是成立的, 同时在 Kähler 的特殊情况下, 这个不等式也是对的(见 [BG]). 不过归根到底, 这个 $b_2(M)$ 的不等式只是胡猜乱想,因为找不出理由来说明为什么 $K > 0$ 可以控制 $b_2(M)$ 到这个地步.

注. 这个 Bishop-Goldberg ([BG]) 的关于 Kähler 流形的不等式已有很大的改善. Mori 在 1979 年刻划了复射影空间 $P_n\mathbf{C}$ (见 [M3]), 其中一个很特殊的情况就蕴涵了 $K > 0$ 的紧致 Kähler 流形都与 $P_n\mathbf{C}$双全纯同构. 这个例子稍后也被 Siu-Yau 于 1980 年在 [SY5] 中用微分几何的方法予以证明(Mori 用代数几何的方法证明).

(二) 设 M 是一个 $2n$ 维的紧致、单连通黎曼流形. 如果 $K > 0$, 是否 $\chi(M) > 0$ ($\chi(M)$ 为 M 的 Euler 示性数)? 如果

$K<0$，是否 $(-1)^n\chi(M)>0$？

参考文献： [C4]，[G1]，[K2]。

在2维时（即 $n=1$），Gauss-Bonnet 定理蕴涵答案是肯定的。在4维时(即 $n=2$)，广义的 Gauss-Bonnet 定理也给出了同样的答案(这是 Milnor 的定理，证明可以参阅 [C4])。在6维以上完全没有结果，但是 [G1] 中的例子说明，广义 Gauss-Bonnet 定理不可能在这情况对这个问题有任何帮助（Klembeck 在 [K2] 中将 Geroch 的例子简化了一点）。我们现在对这个断言加以解释。广义 Gauss-Bonnet 定理是说：

$$\int_M \Psi=\chi(M),$$

其中被积项为

$$\Psi=\alpha\sum_{i_1,\cdots,i_{2n}}\varepsilon(i_1,\cdots,i_{2n})\Omega_{i_2}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2n}}^{i_{2n-1}},$$

这里 α 是一个只依赖于 n 的常数，Ω_j^i 是曲率形式 Ω 对应于标架 $\{X_i\}$ 的分量，

$$\varepsilon(i_1,\cdots,i_{2n})=\begin{cases}+1, & \text{如 } (i_1,\cdots,i_{2n}) \text{ 是 } (1,\cdots,2n) \text{ 的偶置换},\\ -1, & \text{如 } (i_1,\cdots,i_{2n}) \text{ 是 } (1,\cdots,2n) \text{ 的奇置换},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因为 $\Omega_j^i(X_i,X_j)$ 是由 $\{X_i,X_j\}$ 张成的2维平面所确定的截面曲率，所以人们希望能够证明：$K>0\Longrightarrow\Psi$ 在每点上为正的，$K<0\Longrightarrow(-1)^n\Psi$ 在每点上为正的．在4维时，[C4] 中的证明做到这点． 但在6维时，Geroch 的例子说明在一点上可以同时有 $K>0$ 和 $\Psi<0$。所以这个直接的办法不能解决问题．

这个问题中 $K>0$ 的一部分，当然就是（一）的一个特殊情况。似乎也是 H. Hopf 首先提出这个问题的．如果维数是奇的，则 Poincaré 对偶定理立刻导出 $\chi(M)=0$。 所以人们对奇数维

的情况不感兴趣.

（三）设 M_1, M_2 是紧致的、$K<0$的 n 维黎曼流形. 如果 $\pi_1(M_1)=\pi_1(M_2)$, 是否 M_1 与 M_2 微分同胚?

参考文献: [FH].

因为 $K<0$, 所以 Cartan-Hadamard 定理说明 $\exp:(M_1)_x\to M_1$ 是一个覆盖映射 ($x\in M_1$), 故有

$$\pi_i(M_1)=0,\quad \forall i\geqslant 2.$$

同理,

$$\pi_i(M_2)=0,\quad \forall i\geqslant 2.$$

由一般的同伦论, 立知有同伦等价 $f: M_1\to M_2$. 所以上面的问题实际上是问: 是否 f 同伦于一个微分同胚? Gromov (未发表)证明了 $\mathrm{d}f: \mathbf{T}M_1\to\mathbf{T}M_2$ (这里 $\mathbf{T}M$ 表示 M 的切丛), 同伦于一个微分同胚. Farrell-Hsiang 在 [FH] 中则证明

$$f\times\mathrm{id}: M_1\times\boldsymbol{R}^3\to M_2\times\boldsymbol{R}^3$$

(id 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的恒等映射), 同伦于一个微分同胚. 注意: $M_1\times\boldsymbol{R}^3$ 与 $M_2\times\boldsymbol{R}^3$ 同胚, 但不蕴涵 M_1 与 M_2 同胚, 因为拓扑积并没有对消律.

从直观的想法看来, 这个问题是正确的可能性是相当大的, 因为经验告诉我们, $K<0$ 的紧致流形是比较"有刚性"的, 所以单是基本群就可能把它的拓扑型完全决定.

（四）$K<0$ 的夹 (pinching) 问题

参考文献: [G5].

在 § 16 的首段, 我们已经大略地讨论过, 如果一个紧致黎曼流形的截面曲率是"几乎" $+1$ 或 0, 则这个流形就"几乎"与 $K\equiv+1$ 或 $K\equiv 0$ 的空间形式同胚. 现在要问, 如果 K 是"几乎" -1, 则又怎样? 更精确地说, 对 n 维紧致流形 M, 如果存在一个

只依赖于 n 的正数 $\delta(n)$，使截面曲率 K 满足

$$-\delta(n)-1\leqslant K\leqslant -1,$$

则 M 是否与一个紧致的 $K\equiv -1$ 的空间形式同胚？ 如果愿意让 $\delta(n)$ 依赖于 M 的体积或直径，则这个特殊情况的答案是肯定的 (E. Heintze（没有发表）和 [G5])。但在一般的情况下，这个问题目前无从入手.

（五）R^{n+1} 中的常数量曲率的紧致超曲面是否一定与单位球面 S^n 合同？

参考文献： [CY]，[H2]，[W3]。

如果没有任何其它的条件，这个问题不可能有肯定的答案. 所以更精确的说法应该是：常数量曲率加上怎样最弱的条件就可以保证与 S^n 合同？在 $n=2$ 时自然不需要其它条件就有肯定的答案（即古典的 Liebmann 定理）。 如 $n>2$，Cheng-Yau 证明了如加上 $K>0$，则是对的（见 [CY]）。后来 Hartman 在 [H2] 中推广了这个结果如下. 设超曲面 M 的第二基本形式 A 有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，每个 λ_i 是 M 上的函数. 由高斯方程（§13）可证 $\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j$ 就是 M 的数量曲率. 既然知道这个和就是 A 的第二初等对称函数，Hartman 就考虑了第 k 个 A 的初等对称函数为常数的问题.

当 $K>0$，则 M 是强凸的超曲面（见 §13 的讨论）. 一般来说，目前的超曲面**刚性定理**都依靠这种强凸性来进行的. 但是这个强凸性的假设其实太强. 最近 Walter 把 $K>0$ 减弱成为 $K\geqslant 0$，发现结论就比较弱：不能证明与 S^n 合同，只能证明 M 是**等参超曲面**（isoparametric hypersurface（见 [W3]））. 这个方向是值得向前推进的.

（六）在 n 维环面上无共轭点的黎曼度量是否一定平坦?

参考文献：[K4] 中 § 3.9，[G2]。

无共轭点的意义是任何测地线都不具有共轭点．在 2 维时，E. Hopf 证明任何在环面上无共轭点的黎曼度量一定是平坦的（见 [K4]）．所以这个问题是要求 Hopf 定理的高维推广．Green 在 [G2] 中证明在 n 维环面上这种度量的数量曲率 σ 一定满足 $\int_M \sigma \leqslant 0$，而且等号成立的充要条件是 $K=0$．除此之外，别无结果．

（七）当 $n \leqslant 8$ 时，$\boldsymbol{R}^n$ 内稳定（stable）的极小超曲面是否为超平面?

参考文献：[BDG]，[S5]。

当 $n \leqslant 8$ 时，Simons 在 [S5] 中证明了 $\boldsymbol{R}^n$ 内任何余维数为 1 的极小图象一定是超平面，然后，Bombieri-DiGiorgi-Giusti 在 $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqslant 9)$ 内构造了不是超平面的余维数等于 1 的极小图象（见 [BDG]）．在 § 14 的最后部分，我们已证明了任何余维数为 1 的极小图象一定是平稳的．所以这个问题就是要去推广 Simons 的定理，同时也说明为什么要有 $n \leqslant 8$ 的限制．在 § 15 结束之前，我们也提到了 $n=3$ 时，这个问题已被 Fisher-Colbrie-Schoen 和 do Carmo-Peng 独立解决了，见 [FS]，[CP]。

我们也应该提及，在 $n \geqslant 9$ 时，Bombieri-DiGiorgi-Giusti 的定理也是有可能被改善的．Bombieri 提议说这些非超平面的极小图象可能只有**多项式的增长率**，也就是说，如果 M 是极小图象，

$$\dim M = n-1, \quad M \subset \boldsymbol{R}^n \quad (n \geqslant 9),$$

定义

$$M(r) = M \cap \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| \leqslant r\},$$

则有正常数 A, B，使得 $M(r)$ 的体积 $\mathrm{Vol}(M(r))$ 满足

$$\mathrm{Vol}(M(r)) \leqslant Ar^B.$$

最近(1985年7月)闻说 Leon Simon 在 $\boldsymbol{R}^9$ 内已证明了这个猜想的正确性.

(八) 在 S^{n+1} 中考虑所有具有常数量曲率 σ 的紧致极小超曲面,则这些 σ 的值是否离散?

参考文献: [CCK], [PT], [L1].

设 M 为 S^{n+1} 内的紧致极小超曲面,且 M 的数量曲率为一个常数 σ. 命 M 的第二基本形式为 A,定义算子范数 $|A|$ 如 § 14 之公式(14.13),则有 $|A|^2 = n(n-1) - \sigma$. 因此 $|A|^2$ 亦为常数. 且 σ 取的值为离散的,当且仅当 $|A|^2$ 所取的值为离散. 显然 $|A|^2 \geqslant 0$. 现考虑 $|A|^2$ 在 $[0, \infty)$ 内的值,当 $|A|^2 = 0$,则 M 为全测地超球面. 1968年 Simons 在 [S5] 中证明了 $|A|^2$ 在区间 $(0, n)$ 内不能取值. Chern-do Carmo-Kobayashi (见 [CCK]) 与 Lawson (见 [L1]) 独自证明了 $|A|^2 = n$ 的充要条件是 M 为 S^{n+1} 内的 Clifford 环面 (即两球面的积). Peng-Terng 最近证明了在 $\left(n, n + \dfrac{1}{12n}\right)$ 内 $|A|^2$ 又不能取值, 而且在 $n = 3$ 时, 更可证明 $|A|^2$ 在 $(3, 6)$ 内不能取值,而且有超曲面使得 $|A|^2 = 6$. 所以目前待解的问题是: 当 $|A|^2 > n + \dfrac{1}{12n}$ 时, $|A|^2$ 所取的值是否离散? 在数学上这种"**间隙现象**"都是非常有意思的.

参考文献

[A1] W. Ambrose, Parallel translation of Riemannian Curvature, *Ann. of Math.*, **64**(1956), 337—363.

[A2] W. Ambrose, The index theorem in Riemannian Geometry, *Ann. of Math.*, **73**(1961), 49—86.

[AB1] L. Ahlfors and L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.*, **72**(1960), 385—404.

[AB2] E. Asplund and L. Bungart, A first course on integration, Holt-Rinehart-winoton, 1966.

[AS] S. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces, Princeton Univ. press, 1960.

[AW] S. Aloff and N. Wallach, An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structure, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **81**(1975), 93—97.

[B1] M. Berger, Les variétés riemanniennes homogénes normales simplement connexes à coubure strictement positive, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **15**(1961), 179—246.

[B2] M. Berger, Lecture on Geodesic in Riemannian Geometry, Tata Institute of Fundamental Reserch, Bombay, 1965.

[B3] L. Bérard Bergery, Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impair à courbure strictement positive, *J. Math. Pure Appl.*, **55**(1976), 47—68.

[B4] L. Bers, Riemann Surfaces, Courant Institute Lecture Notes, 1957—58.

[B5] A. L. Besse, Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag, 1978.

[B6] M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies Theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 74—76.

[BC] R. Bishop and R. Crittenden, Geometry of manifolds, Academic press, New York, 1964.

[BDG] E. Bombieri, E. DiGiorgi and E. Giusti, Minimal Cones and the Bernstein's problem, *Inventiones Math.*, **7**(1969), 243—268.

[BG] R. L. Bishop and S. Goldberg, On the second cohomology group of a Kähler manifold of positive curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 119—122.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, Le Spectre d'une Variété Riemannienne, Springer-Verlag Lecture Notes in math., vol. 194, 1971.

[BK] P. Buser and H. Karcher, Gromov's Almost flat Manifolds, *Astérisque*, vol. **81**, 1981.

[BO] R. Bishop and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 1—49.

[C1] E. Calabi, On Ricci curvature and geodesics, *Duke Math. J.* **134** (1967), 667—676.

[C2] H. Cartan, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 15—27 and 57—71.

[C3] S. Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorem and its geometric applications, *Math. Z.*, **143**(1975), 289—297.

[C4] S. S. Chern, On curvature and characteristic classes of a Riemannian manifold, *Abh. Math. Semin. Hamburg*, **20** (1955), 117—126.

[C5] S. S. Chern, Minimal Submanifolds in a Riemannian manifold, University of Kansas Mimeographed Notes, Lawrence, 1968.

[C6] S. S. Chern, Complex manifolds without potential theory, 2nd ed., Springer-Verlag, 1979.

[CC] 陈省身,陈维桓,微分几何讲义,北京大学出版社, 1983.

[CCK] S. S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form constant length, Functional Analysis and Related Fields (Volume in Honor of M. H. Stone), F. E. Browder, editor, Springer-Verlag, 1970, 59—75.

[CE] J. Cheeger and D. Ebin, Comparison Theorem in Riemannian Geometry, North-Holland publishing company, 1975.

[CG1] J. Cheeger and D. Gromoll, The splitting theorem for manifolds of non-negative Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, **6**(1971), 119—128.

[CG2] J. Cheeger and D. Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative curature, *Ann. of Math.*, **96**(1972), 413—443.

[CGT] J. Cheeger, M. Gromov and M. Taylor, Finite propagation speed, Kernel estimates for functions of the Laplace oprator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **17** (1982), 15—53.

[CHW] S. S. Chern, P. Hartman and A. Wintner, On isothermic coordinates, *Comment. Math. Helv.*, **28**(1954), 301—309.

[CP] M. P. do Carmo and C. K. Peng, Stable complete minimal surfaces in $\boldsymbol{R}^3$ are planes, *Bull. Amer. Math. Soc. (new Series)*, **1**(1979), 903—905.

[CW] M. P. do Carmo and N. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, *Ann. Math.*, **93**(1971), 43—62.

[CY] S. Y. Cheng and S. T. Yau, Hypersurfaces with constant scalar curvature, *Math. Ann.*, **225**(1977), 195—204.

[E1] P. Eberlein, Lattices in spaces of nonpositive curvature, *Ann. of Math.*, **111** (1980), 435—476.

[E2] P. Eberlein, Euclidean de Rham factor of a lattice of nonpositive curvature, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983), 209—220.

[E3] J. H. Eschenburg, New examples of manifolds with strictly positive curvature, *Invent. Math.*, **66**(1982), 469—480.

[F1] H. Federer, Geometric measure theory, Springer-Verlag, 1969.

[F2] M. H. Freedman, The topology of fourdimensional manifolds, *J. Diff. Geom.*, **17**(1982), 357—453.

[FH] F. T. Farrell and W. C. Hsiang, On Novikov's conjecture for non-positively curved manifolds, I, *Ann. of Math.*, **113**(1981), 199—209.

[FS] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**(1980), 199—211.

[G1] R. Geroch, Positive sectional curvature does not imply positive Gauss-Bonnet integrand, *Proceedings Amer. Math. Soc.*, **54**(1976), 267—270.

[G2] L. Green, A theorem of E. Hopf, *Michigan Math. J.*, **5**(1958), 31—34.

[G3] R. E. Greene, Complete metrics of bounded curvature on noncompact manifolds, *Arch. Math.*, **31**(1978), 89—95.

[G4] M. Gromov, Stable mappings of fiberings into manifolds, *Izv. Akad. Nauk. USSR, Ser. Mat.*, **33**(1969), 707—734, = *Math. USSR Izv.*, **33**(1969) 671—694.

[G5] M. Gromov, Manifolds of negative curvature, *J. Diff. Geom.*, **13**(1978), 223—230.

[G6] M. Gromov, Almost flat manifolds, *J. Diff. Geom.*, **13**(1978), 231—241.

[G7] M. Gromov, Paul Levy's isoperimetric inequality, Inst. Hautes Etudes Sci. preprint, 1980 (unpublished).

[G8] M. Gromov, Curvature, diameter and Betti numbers, *Comment. Math. Helv.*, **56**(1981), 179—195.

[GG] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable mapping and their singularities, Springer-Verlag, 1973.

[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg and W. Meyer, Riemannsche Geometrie in Grossen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1966.

[GL1] M. Gromov and H. B. Lawson, Spin and Scalar curvature in the

presence of a fundamental group, *Ann. of Math.*, **111**(1980), 209—230.

[GL2] M. Gromov and H. B. Lawson, The classification of simply connected manifolds of scalar curvature, *Ann. of Math.*, **111**(1980), 423—434.

[GM] D. Gromoll and W. Meyer, On complete open manifolds of positive curcature, *Ann. of Math.*, **90**(1969), 75—90.

[GR] M. Gromov and V. A. Rohlin, Imbeddings and immersions in Riemannian geometry, *Uspeki Mat. Nauk* **25**(1970), 3—62, = *Russian Math. Surveys*, **25**, No. 5(1970),1—57.

[GS1] K. Grove and K. Shiohama, A generalized sphere theorem, *Ann. of Math.*, **106**(1977), 201—211.

[GS2] R. E. Greene and K. Shiohama, Convex functions on complete noncompact manifolds: Topological structure, *Inventiones Math.*, **63** (1981), 129—157.

[GS3] R. E. Greene and K. Shiohama, Convex functions on complete noncompact manifolds; differentiable structures, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, **14**(1981), 357—367.

[GW1] R. E. Greene and H. Wu, Whitney's imbedding theorem by solutions of elliptic equations and geometric consequences, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **27**(1975), part II, 287—296.

[GW2] R. E. Greene and H. Wu, C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature, *Acta Math.*, **137**(1976), 209—245.

[GW3] R. E. Greene and H. Wu, Function Theory on manifolds which possess a pole, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., vol. 699, 1979.

[GW4] R. E. Greene and H. Wu, Gap theorems for noncompact Riemannian manifolds, *Duke Math. J.*, **49**(1982), 731—756.

[H1] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.*, **19**(1982), 255—306.

[H2] P. Hartman, On complete hypersurfaces of nonnegative sectional curvatures and constant m-th curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **245**(1978), 363—374.

[H3] S. Helgason, Differential geom. and symmetric spaces, Academic press, 1962.

[H4] N. J. Hicks, Notes on Differential Geom., New York, D. Van Nostrand Co., 1965.

[H5] W. Y. Hsiang, Minimal cones and the spherical Bernstein problem, I, *Ann. of Math.*, **118**(1983), 61—73.

[HK] E. Heintze and H. Karcher, A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds, *Ann. Scient.*

Ec. Norm. Sup., **11**(1975), 451—470.

[HTY] W. Y. Hsiang, Z. Teng and W. Yu, New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$-spheres into Euclidean $2k$-space, *Ann. of Math.*, **117**(1983), 609—625.

[IR] H. C. ImHof and E. Ruh, An equivariant pinching theorem, *Comm. Math. Helv.*, **50**(1975), 389—401.

[K1] A. Kasue, A Laplacian comparison theorem and function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds, *Japan J. Math.*, 8 (1982), 309—341.

[K2] P. Klembeck, On Geroch's couterexample to the algebraic Hopf conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **59**(1976), 334—336.

[K3] W. Klingenberg, Lectures on closed geodesic, Springer-Verlag (Grundlehren Series), 1978.

[K4] W. Klingenberg, Riemannian Geometry, de Gruyter, 1982.

[K5] S. Kobayashi, On conjugate and cut loci, Studies in Global Geometry and Analysis (ed. S. S. Chern), Math. Assoc. Amer., 1967, 96—122.

[K6] S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mapping, Marcel Dekker, 1970.

[K7] S. Kobayashi, Transformation Group in Differential Geometry, Ergebnisse de Math., Springer-Verlag, 1972.

[KM] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, Groups of homotopy spheres I, *Ann. of Math.*, **77**(1963), 504—537.

[KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, New York Interscience, vol. I(1963), vol. II (1969).

[KW] J. Kazdan and F. W. Warner, Prescribing curvature, *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. **27**(1975), part II, 309—320.

[L1] H. B. Lawson, Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces, *Ann. of Math.*, **89**(1969), 187—197.

[L2] H. B. Lawson, Lectures on Minimal Submanifolds, Publish or Perish, 1980.

[M1] J. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1963.

[M2] J. Milnor, Lecture on the h-cobordism theory, Princeton University Press, 1963.

[M3] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, *Ann. of Math.*, **110**(1979), 593—606.

[MR1] Min-Oo and E. Ruh, Comparison theorems for compact Symmetric Spaces, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **12**(1979), 335—353.

[MR2] Min-Oo and E. Ruh, Vanishing theorems and almost symmetric spaces of noncompact type, *Math. Ann.*, **257**(1981), 419—433.

[MSY] N. Mok, Y. T. Siu and S. T. Yau, The Poincaré-Lelong equation on complete Kähler manifolds, *Compositio Math.*, **44**(1981), 183—218.

[N1] J. C. C. Nietsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer-Verlag, 1975.

[N2] L. Nirenberg, Variational and Topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc., New series*, 4(1981), 267—302.

[NR] M. S. Narasimham and S. Ramanan, Existence of universal connections, *Amer. J. Math.* 83(1961), 563—572; 85(1963), 223—231.

[O] R. Osserman, A survey of Minimal Surfaces, Van Nostrand, N. Y., 1969.

[PT] C. K. Peng and C. L. Terng, Minimal hypersurfaces of spheres with constant scalar curvature, Seminar of Minimal Submanifolds, Annals of Mathematics Studies, volume 103, 1983, 177—198.

[R1] de Rham, Sur la reductibilité d'un espace de Riemann, *Comm. Math Helv.*, 26(1952), 328—344.

[R2] de Rham, Variétés Differentiables, Hermann, 1960.

[R3] R. T. Rockaffellar, Convex Analysis, Princeton University press, 1970.

[R4] E. Ruh, Almost flat manifolds, *J. Diff. Geom.*, 17(1982), 1—14.

[RN] F. Riesz and B. Sz. Nagy, Functional analysis, Frederick Ungar, 1955.

[S1] R. Sacksteder, On hypersurfaces with no negative sectional curvatures, *Amer. J. Math.*, 82(1960), 609—630.

[S2] J. T. Schwartz, Non-linear Functional Analysis, Gordon and Breach, 1969.

[S3] J. P. Serre, Homologie Singuliere des espaces fibres, *Ann. of Math.*, 54(1951), 425—505.

[S4] K. Shiohama, A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature, *Transaction Amer. Math. Soc.*, 275(1983), 811—819.

[S5] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* 88(1968), 62—105.

[S6] S. Smale, Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than Four, *Ann. of Math.*, 74(1961), 391—406.

[S7] S. Smale, On the Morse index theorem, *J. Math., Mech.*, 14(1965), 1049—1056.

[S8] M. Spivak, A comprehensive introduction to Differential Geometry I, II, IV, Boston publish or perish, 1970, 1975.

[S9] J. J. Stoker, Differential Geometry, Wiley-Interscience, 1969.

[ST] H. Seifert and W. threlfall, 江嘉禾译，大范围变分学，上海科技出版社，1963.

[SY1] R. Schoen and S. T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negativ scalar curvature, *Ann. of Math.*, 110(1979), 127—142.

[SY2] R. Schoen and S. T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general ralativity, *Comm. Math. Phys.*, **65**(1979), 45—76.

[SY3] R. Schoen and S. T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, *Manuscripta Math.*, **28**(1979), 159—183.

[SY4] R. Schoen and S. T. Yau, Proof of the positive mass theorem II, *Comm. Math. Phys.* **79**(1981), 231—260.

[SY5] Y. T. Siu and S. T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, *Invent. Math.*, **59**(1980), 189—204.

[T1] K. Tenenblatt, On isometric immersions of Riemannian manifolds, *Bol. Soc. Brasil Mat.*, **2**(1971), 23—36.

[T2] Y. Tsukamoto, On Riemannian manifolds with positive curvature, *Mem. Fac. Sci. kyushu univ.*, **A15**(1962), 90—96.

[V] K. Voss, Über vollstandige Minimalflächen, *L'Enseign. Math.*, **10** (1964), 316—317.

[W1] N. R. Wallach, Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature, *Ann. of Math.*, **96**(1972), 277—295.

[W2] R. Walter, Konvexitat in Riemannschen manigfaltigkeiten, *Jber. d. Dt. Math. Verein.* **83**(1981), 1—31.

[W3] R. Walter, Compact hypersurfaces with a constant higher mean curvature function, *Math. Ann.* **270**(1985), 125—145.

[W4] F. W. Warner, The conjugate locus of a Riemannian manifold, *Amer. J. Math.* **87**(1965), 575—604.

[W5] F. W. Warner, Extension of the Rauch comparison theorem to submanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **122**(1966), 341—356.

[W6] A. D. Weinstein, The cut locus and conjugate locus of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.* **87**(1968), 29—41.

[W7] R. O. Wells, Jr., Differential Analysis on complex manifolds, Prentice Hall, 1973.

[W8] J. A. Wolf, Space of constant curvature, 3rd ed., Publish or Perish, 1974.

[W9] 伍鸿熙，微分几何中的 Bochner 技巧，数学进展 **10**(1981), 57—76; **11** (1982), 19—61.

[W10] 伍鸿熙，陈志华，吕以辇，紧黎曼曲面引论，科学出版社，1981.

[X] F. Xavier, The Gauss map of a complete nonflat minimal surface connot omit 7 points on the sphere, *Ann. of Math.* **113**(1983), 211—214.

[Y] S. T. Yau, Problem section, Seminar on Differential Geometry, Annals of Mathematics Studies, volume 102, Princeton University Press, 1982, 669—706.

[Z] A. Zaanen, An introduction to the theory of integration, North Holland, 1958.

索　引

一 划

二 划

三 划

四 划

五　划

六　划

七　划

八　划

九　划

十　划

十一划

十二划

十 三 划

十 四 划

十五划

十六划以上

其　他

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝黎曼几何初步
作者＝伍鸿熙　沈纯理等
页数＝３１１
ＳＳ号＝１０５３６３４２
出版日期＝１９８９年１０月第１版